DISEÑO DE ELEMENTOS DE CONCRETO ARMADO

COLUMNAS
JUNTAS VIGAS - COLUMNAS
FUNDACIONES
CABEZALES
VIGAS DE RIOSTRAS

ING. CARLOS A. LANDA BARTOLON
Profesor Asociado de
la Universidad Santa María

TERCERA EDICION
CARACAS 1988

EDICIONES LANCA C.A.

CARACAS – VENEZUELA

PROLOGO

Presentar la tercera edición de este libro significó actualizar y ampliar los conceptos emitidos en las ediciones anteriores, así como hacerlo vigente con las normas para el cálculo de edificaciones de concreto armado que rigen en la actualidad, por lo tanto acoge las recomendaciones del Código del Instituto Americano de Concreto (ACI BUILDING CODE REQUERIMENTS FOR REINFORCED CONCRETE 318), las cuales han sido adoptadas en Venezuela por la Comisión de Normas de Estructuras para Edificaciones del Ministerio del Desarrollo Urbano en las normas titulada ESTRUCTURAS DE CONCRETO ARMADO PARA EDIFICIOS, ANALISIS Y DISEÑO. COVENIN – MINDUR 1753 – 87.

Este libro intenta ser una guía práctica y comentada para el ingeniero estructural para que se familiarice con las normas vigentes y su uso.

Sin querer sustituir en ningún momento a las normas, presento en cada capítulo un resumen de los artículos y comentarios que se aplican al tema que se desarrolla, por lo tanto, va a permitir tener la condensación de las normas en un sólo paquete, agrupadas y seleccionadas para el tema específico que se expone.

Tiene como característica este libro que estudia los elementos principales que componen una estructura de concreto armado, tales como: columnas, juntas vigas–columnas, fundaciones, cabezales y vigas de riostras. Justifico éstos temas entregados y la ausencia de temas secundarios tales como: vigas, losas, escaleras, etc., debido a la poca literatura técnica, tanto del habla hispana como inglesa, que desarrollen profundamente, con abundancia de detalles, con especificaciones y con ejemplos reales los temas que se presentan en esta obra, sin embargo, es usual conseguir en toda la litaratura relacionada con el concreto armado la flexión pura, diseño de vigas, losas, etc.

El tema de las columnas se expone en cinco capítulos, el Capítulo I desarrolla la Carga Axial Pura, el Capítulo II la Flexo–Compresión Uniaxial, el Capítulo III la Flexo – Compresión Biaxial, el Capítulo IV la Esbeltez y el Capítulo VI como Selección de Cargas y Predimensionado de Columnas. En estos temas se incorpora un elemento nuevo a los tradicionales libros del área de concreto armado, que está presente y vigente en la ingeniería estructural, se anexa el software requerido para la elaboración de diagramas de interacción de columnas sometidas a flexo-compresión en BASIC, permitiendo obtener la curva de interacción con la precisión de cuarenta y cuatro puntos sobre ella, cosa que permite dibujar con bastante exactitud la verdadera forma de la curva de interacción de flexo–compresión de una columna.

Es nuevo en esta tercera edición, el tema también incorporado recientemente en las normas de Juntas de Vigas – Columnas para el diseño sísmico en el Capítulo V, se exponen casi literalmente las nuevas normas y se presentan diferentes ejercicios que hacen referencias a ellas.

En el Capítulo VII Fundaciones, se desarrollan las distintas posibilidades de fundar directamente una estructura, tales como: fundaciones aisladas, combinadas, de tira, placas de fundación y fundaciones sin y con cargas excéntricas. Se presenta un amplio resumen de todas las normas que involucran el diseño de las zapatas de fundación, así como el diseño de la junta columna – zapata o columna – pedestal.

El tema de Cabezales se discute ampliamente en el Capítulo VIII donde se presentan las opciones para su diseño, se desarrollan ejemplos ajustados a la realidad, y se entrega algunas tablas que van a permitir predimensionar y diseñar rápidamente cualquier cabezal.

Por último se presentan algunas expresiones para el diseño de las Vigas de Riostras en el Capítulo I. relacionándolas con las normas, que como se sabe no se refieren a este tema. Se presentan diversos ejercicios que relacionan situaciones reales de su comportamiento, así como las normas que se pueden relacionar con las vigas de riostras.

PROCEDIMIENTO PARA USAR ESTE LIBRO
Las normas venezolanas COVENIN – MINDUR y el ACI tratan de los requisitos para el diseño estructural en forma unitaria para cada solicitación específica, este libro estudia el diseño de elementos de concreto armado sometido a las diferentes solicitaciones de trabajo que aportan las cargas aplicadas tales como: corte, carga axial y flexión.
Como en cada capítulo de este libro se desarrollan elementos estructurales en particular, tales como: columnas en todas sus manifestaciones, juntas de vigas – columnas, fundaciones, cabezales y vigas de riostras, se requiere una recopilación en cada capítulo de las normas que rigen su diseño, las cuales se encuenran en orden numérico estrictamente y con la simbología y nomenclatura congruente con las normas COVENIN – MINDUR y ACI y se indica cual es el capítulo y la sección de las normas presentado entre paréntesis así: (A.00.00.00) o (C.00.00.00), donde A y C significa el ARTICULADO o COMENTARIO de las normas y 00.00.00 representa el número del capítulo y su sección.

CARLOS A. LANDA B.

CONTENIDO

CAPITULO I

Carga Axial Pura

1.1 INTRODUCCION

El caso de carga axial pura no existe en la naturaleza, quedándose éste concepto sólo a nivel teórico, aunque éste caso, en combinación con otras solicitaciones sí es de importancia. Como las estructuras son generalmente contínuas, éstas se encuentran solicitadas por una combinación de solicitaciones, entre ellas la flexo-compresión.

Ensayando una muestra de concreto simple y representándolo según la curva esfuerzo deformación para una carga instantánea, se observa que la deformación para la cual se genera el máximo esfuerzo f'c es aproximadamente 0,002, con una muestra de un cilindro convencional el cual tiene una relación longitudinal a diámetro de 2, ya que su altura es de 12 pulgadas y su diámetro de 6 pulgadas, ver la Fig. 1.1

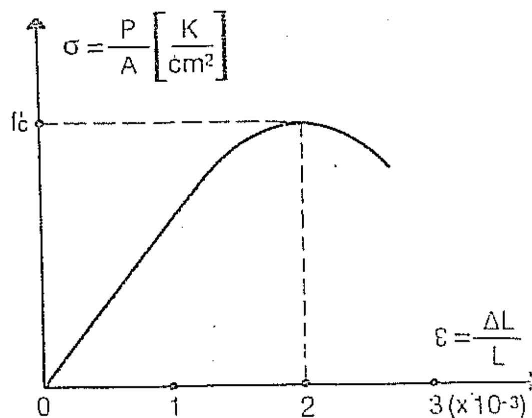


Figura 1.1

Sin embargo, cuando un cilindro de concreto simple es modificado en cuanto a sus dimensiones y de hecho en su relación de esbeltez, es decir, la relación longitud a diámetro, se observa una disminución del máximo esfuerzo que puede desarrollar, aunque mantiene constante la deformación unitaria a la cual se produce estos esfuerzos.

La disminución de esfuerzos se estabiliza manteniéndose más o menos constante en el orden de 0,85 f'c para relaciones de esbeltez mayores de 2 lo cual se ve en la Fig. 1.2.

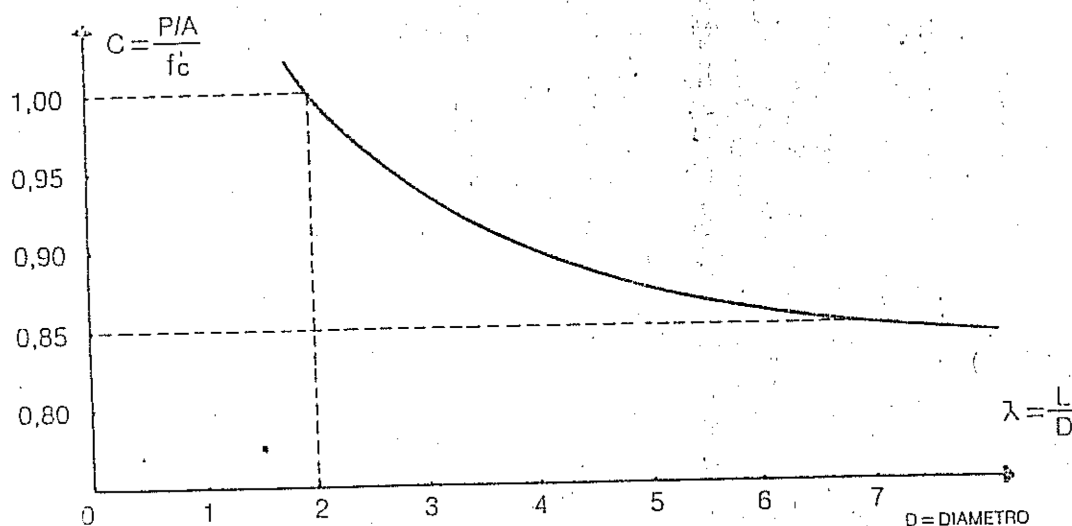


Figura1.2

Se puede ver el histograma de la relación esfuerzo máximo generado a esfuerzo máximo del material probado en cilindros con relación de esbeltez 2, lo que indica el rango de variación entre 0,70 y 0,95 , sin embargo el gran promedio se ubica en 0,85 , por lo tanto, se puede concluir que una pieza de concreto simple también desarrolla este esfuerzo, ver la Fig. 1.3.

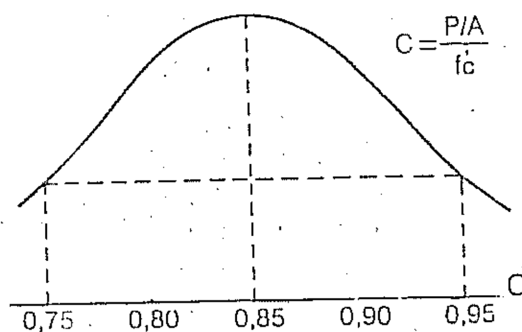


Figura 1.3

1.2 COLUMNAS LIGADAS

Para la muestra de la Fig. 1.4 , si a ésta pieza de concreto simple se le adiciona refuerzo longitudinal de acero; el cual se mantiene en su sitio en el momento del vaciado del concreto y para tal fin se colocan unos elementos alrededor de este acero, los cuales se llaman ligaduras (con el sólo fin de mantener el acero longitudinal en posición), éste tipo de columnas se llamarán columnas ligadas. Es necesario aclarar que para la condición de carga axial pura, la única función de éstas ligaduras es mantener el acero longitudinal en posición, sin embargo, para el caso de flexocompresión

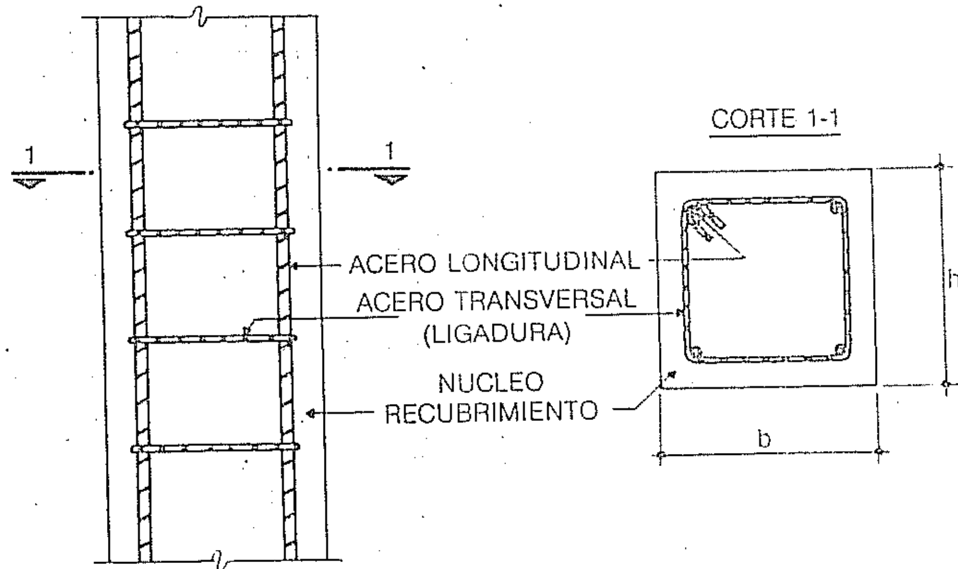


Figura 1.4

estarán destinadas también a absorver el corte que origina la flexión, y su distanciamiento será regido también por los esfuerzos de corte que se manifiesten.

El diagrama esfuerzo–deformación resultante indica que se sigue desarrollando el esfuerzo 0,85f'c, pero con una deformación unitaria de 3‰, por lo cual las normas permiten tomar como deformación unitaria última $\xi_{cu} = 0{,}003$ *(A. 10. 2. 3.)*, ver Fig. 1.5.

Resumiendo, la causas que generan esta reducción de los esfuerzos en el material concreto en columnas son básicamente:

a.-La relación de esbeltez, de la pieza estructural.

b.-La disgregación del material en el momento del vaciado.

c.-La compactación en sitio, la cual no exactamente igual a la del cilindro.

d.-El curado de la pieza.

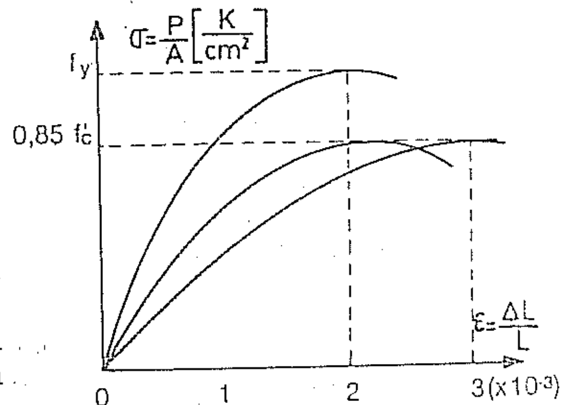


Figura 1.5

Luego, el comportamiento de una columna ligada se puede definir como la suma de los comportamientos individuales de cada elemento que la integran, lo cual se puede ver en la Fig. 1.6.

Como en condiciones últimas la deformación unitaria es de 0,003, también el concreto como el acero se encuentran a 0,85 f'c y fy respectivamente, y la resistencia a compresión pura estaría definida por:

Contribución de Concreto
Pu= ØPo = Ø 0,85 f'c Ag   Donde Ø = 0,70   *(A.10. 2. 7.)*

Contribución del Acero
Pu= ØPo = Ø Ast fy   *(A. 10. 2. 4.)*

Es decir la carga última de una columna ligada será la suma algebraica
Pu= ØPo = Ø(0,85 f'c Ag + Ast fy)

En esta ecuación la expresión Ag significa según normas área total de concreto o área gruesa, y la expresión anterior por lo tanto es válida hasta el punto "S", o sea , cuando el recubrimiento de la pieza empieza a desprenderse, en este instante la columna falla por tensión diagonal del concreto y el acero longitudinal comienza a pandear en el espacio libre de ligadura a ligadura que éstas dejan, es decir, el punto de fluencia del acero y la máxima resistencia a la rotura del concreto son una misma cosa, es lógico que el núcleo intente expandirse y los estribos en ocasiones completando la falla puedan saltar, ver Fig. 1.7.

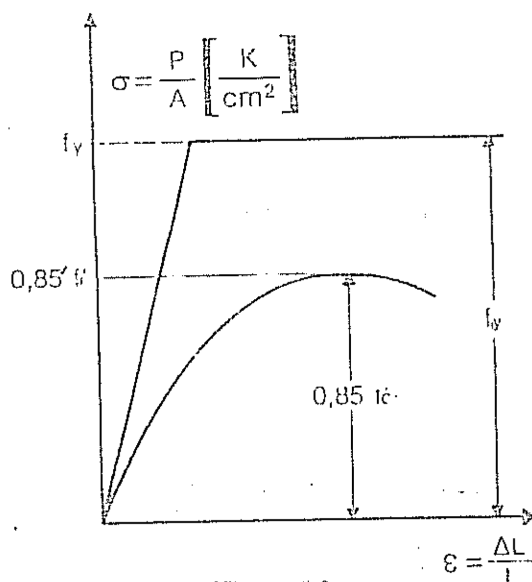


Figura 1.6

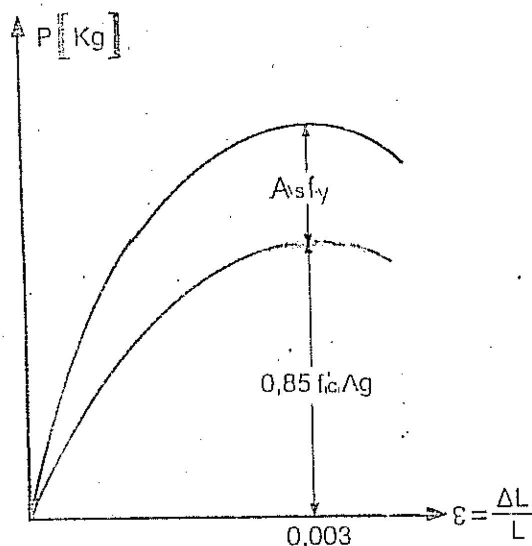


Figura 1.7

Todo esto obliga a mantenernos dentro de unas normas mínimas de cantidad de ligaduras y espaciamientos de ligaduras, las cuales son normalizadas e indicadas más adelante.

Si se quiere ser aún más estricto, la expresión Ag en realidad debería expresar sólo el área de concreto, por lo tanto, a la expresión de carga axial pura de la columna se le podría descontar la cantidad de Ast que contiene en su núcleo, cosa que se desprecia por ser porcentajes bastante pequeños, no pasando de un 8% según normas y a nivel de proyectistas procurándose no exceder de 4% por razones constructivas y de compactación en el momento del vaciado.

1.3 COLUMNAS ZUNCHADAS

En el año 1.903 se inicia el estudio de las columnas de concreto armado con acero longitudinal con refuerzo transversal helicoidal o zunchos, de ahí el nombre de columnas zunchadas, las cuales tienen un comportamiento distinto al de columnas ligadas, pues a partir del instante en que el recubrimiento comienza a desprenderse, punto "S"en la curva de la Fig. 1.9, el núcleo de concreto intenta expandirse en dirección transversal por efectos del módulo de Poisson, (ya ha habido un acortamiento longitudinal de la pieza), el zuncho que lo envuelve no lo permite, por lo cual el zuncho genera un confinamiento del concreto sobre el núcleo, y a su vez el zuncho trabaja a tensión, (téngase en cuenta que el zuncho es un elemento contínuo), en definitiva se tiene un núcleo confinado, lo cual hace que se incremente la capacidad resistente a compresión del material concreto que compone el núcleo, ver Fig. 1.8.

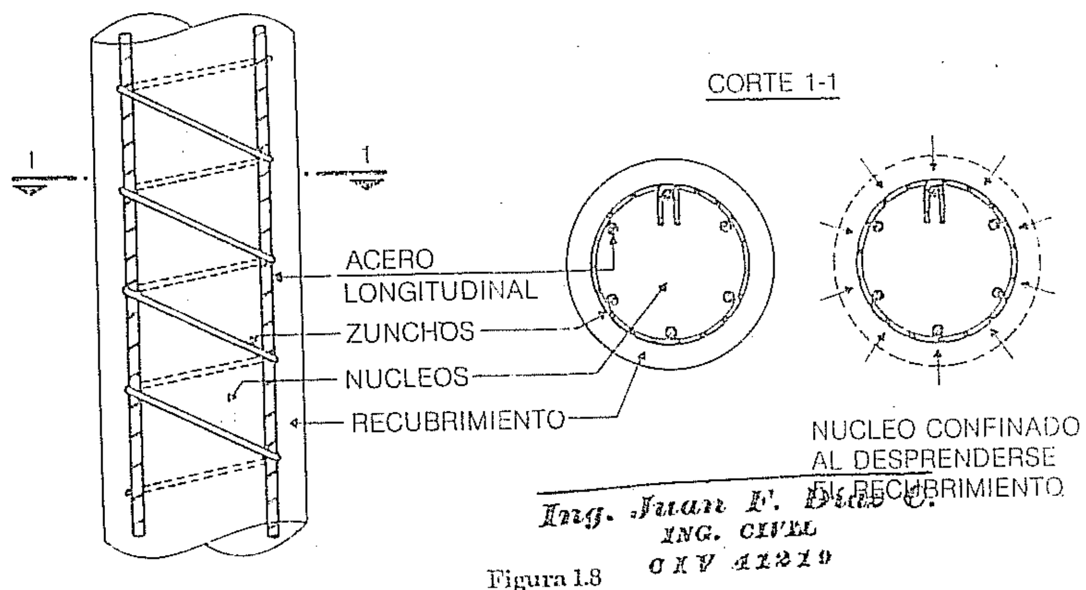


Figura 1.8

Es decir, lo que se ha llamado Rango de Confinamiento Zunchado, en el gráfico representa un aumento de resistencia en el núcleo por efecto del confinamiento, ver Fig. 1.9.

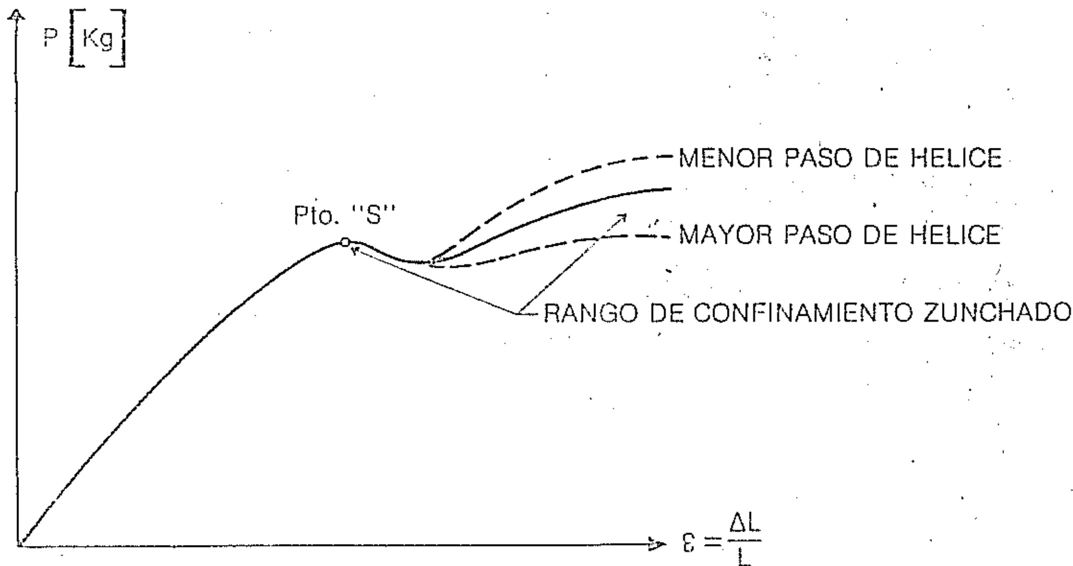


Figura 1.9

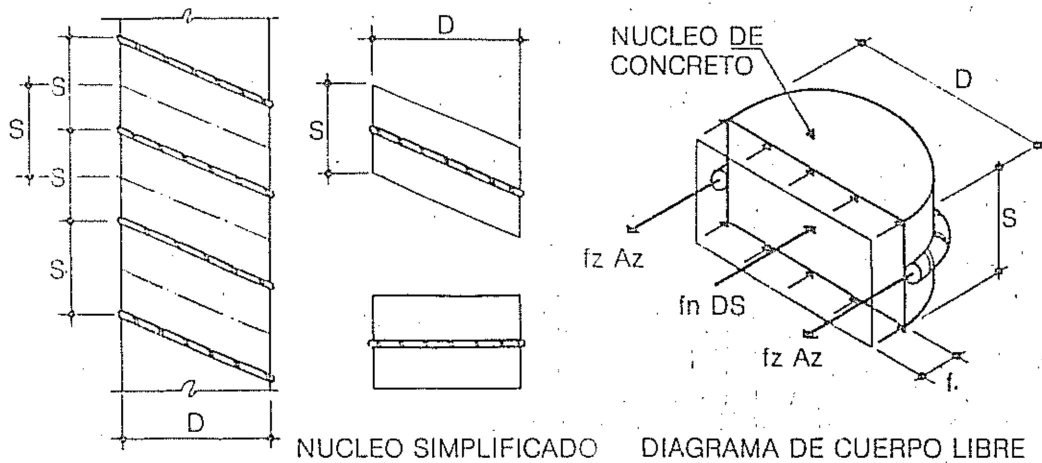


Figura 1.10

Este proceso se puede demostrar de la siguiente forma, considerándose un núcleo zunchado sin acero longitudinal de diámetro D, separación o paso entre zuncho o simplemente paso s y el área del zuncho tómese como A_z, como se muestra en la Fig. 1.10.

Se asume f_n como un esfuerzo uniforme y que el zuncho es horizontal, por lo cual trabajamos con un segmento simplificado para con mayor sencillez aplicar las fórmulas, luego, si tomamos $\sum F_h = 0$, se tiene que:

$$\Sigma Fh = 0 = f_n D s - 2 A_z f_z \Rightarrow f_n = \frac{2 A_z f_z}{D s}$$

Pero esta expresión tal como se indica en función de esos parámetros no es fácil su aplicación en el diseño, por lo cual, las normas permiten expresarla en función del porcentaje de zunchos.

1.3.1 PORCENTAJE DE ZUNCHO

Se define porcentaje de zuncho, como la relación entre el volúmen del zuncho en un paso de la hélice al volúmen de concreto en un paso de la hélice, o sea:

$$p_z = \frac{A_z \pi D}{\frac{\pi D^2 s}{4}} \Rightarrow p_z = \frac{4 A_z}{D s}$$

Despejando A_z de la ecuación , $A_z = \frac{p_z D s}{4}$

sustituyendo A_z en p_z se tiene que : $f_n = \frac{p_z f_z}{2}$

Haciendo un símil de este efecto de confinamiento del núcleo f_n, con el ensayo triaxial que se hace para suelos regido por la siguiente expresión:

$f = f_1 + 4{,}1 f_2$ Donde, f_1 = Esfuerzo axial sin confinamiento.
f_2 = Esfuerzo de confinamiento.
f = Esfuerzo axial con confinamiento.

Luego, en el caso de material concreto se tiene $f_c = 0{,}85 f'_c + 4{,}1 f_n$

y como $f_n = \frac{p_z f_z}{2}$, sustituyendo se tiene:

$$f_c = 0{,}85 f'_c + 4{,}1 \frac{p_z f_z}{2} = 0{,}85 f'_c + 2{,}05 p_z f_z$$

Pero las normas permiten utilizar la expresión simplificada siguiente:

$$f_c = 0{,}85 f'_c + 2 p_z f_y$$

Por lo tanto, un núcleo de concreto con acero heliciodal resistiría

$$P_u = \varnothing (0{,}85 f'_c + 2 p_z f_y) A_n$$

Luego, cuando una columna zunchada se le adiciona refuerzo longitudinal la capacidad resistente viene dada según.

Antes de saltar el recubrimiento

$P_u = \varnothing\,(0{,}85\, f'_c\, A_g + A_{st}\, f_y)$

Después de saltar el recubrimiento

$P_u = \varnothing\,(0{,}85\, f'_c\, A_n + A_{st}\, f_y + 2\, p_z\, f_y\, A_n)$

O sea, que el comportamiento de una columna zunchada es el mismo de una columna ligada antes de desprenderse el recubrimiento, pero una vez ocurrido ésto, este tipo de columnas es capaz de desarrollar aún algo más de resistencia por efecto del confinamiento anteriormente hablado.

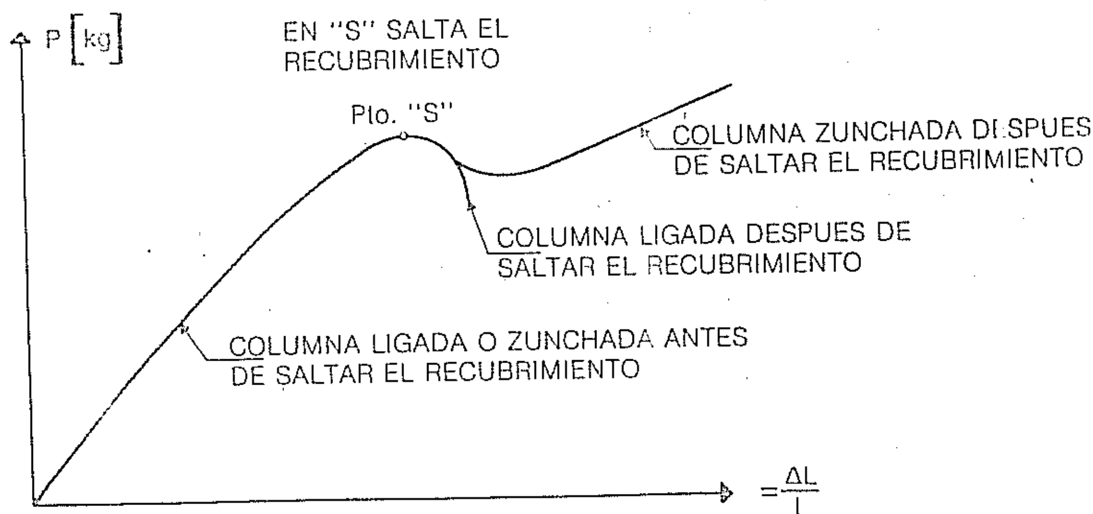


Figura 1.11

En la Fig. 1.11 se presenta la comparación de resistencia para el caso de una columna ligada y otra zunchada.

Evidentemente el zuncho juega un papel muy importante en este aumento de resistencia, recuérdese que el efecto sólo se manifiesta cuando la columna queda sujeta a una carga y una deformación suficiente para que se genere el desprendimiento del recubrimiento exterior del concreto, por lo tanto la cantidad de refuerzo helicoidal o zunchos deberá proporcionar una resistencia de carga adicional a la resistencia perdida por el desprendimiento del recubrimiento *(C. 10. 9. 3.)*, por lo tanto la resistencia de la columna zunchada necesariamente deberá ser mayor que la de la columna ligada.

Discriminando la carga axial resistente, como la suma algebraica de las cargas que aportan cada elemento que compone una columna, distinguiendo a éstos como el núcleo, recubrimiento, zunchos, aceros, se tiene:

$P_n = P_{núcleo}$ $P_{rec} = P_{recubrimiento}$

$P_{As,\,long} = P_{Acero\ longitudinal}$ $P_z = P_{zunchos}$

Se tiene que :

$P_{\substack{columna\\zunchada}} > P_{\substack{columna\\ligada}}$ (debido a los efectos de los zunchos)

Así mismo, la $P_{\substack{columna\\zunchada}}$ está compuesta de la combinación de los siguientes efectos:

$P_{\substack{columna\\zunchada}} = P_n + P_{rec} + P_{As,\,long} + P_z$

A su vez, la $P_{\substack{columna\\ligada}}$ está compuesta de la combinación de los siguientes efectos:

$P_{\substack{columna\\ligada}} = P_n + P_{rec} + P_{As,\,long}$

Sustituyendo:

$P_n + P_{As,\,long} + P_z > P_n + P_{rec} + P_{As,\,long} \Rightarrow P_z > P_{rec}$

Conociendo que $P_z = 2{,}05\ p_z\ f_y\ A_n$ y $P_{rec} = 0{,}85\ f'_c\ (A_g - A_n)$ y sustituyendo

$$2{,}05\ p_z\ f_y\ A_n > 0{,}85\ f'_c\ (A_g - A_n) \Rightarrow p_z > 0{,}415\ \frac{f'_c}{f_y}\left[\frac{A_g}{A_n} - 1\right]$$

Como la diferencia en resistencia entre una columna y otra es la de carga que aportan los zunchos P_z, la cual es de 10%, las normas dicen lo siguiente: La relación del refuerzo en espiral "p_z" no debe ser menor que el valor dado por:

$$p_z \geq 0{,}45\ \frac{f'_c}{f_y}\left[\frac{A_g}{A_n} - 1\right] \quad \text{Donde} \quad f_y \leq 4.200\ K/cm^2 \quad (A.10.\ 9.\ 3.)$$

1.4 FACTORES DE REDUCCION DE RESISTENCIA

Los factores de reducción de resistencia "Ø" para columnas en compresión axial con o sin flexión.

Miembros con refuerzo en espiral Ø = 0,75 *(A. 9. 3. 2. c.)*

Otros miembros reforzados Ø = 0,70 *(A. 9. 3. 2. c.)*

Nótese que para columnas zunchadas se les concede un valor de Ø más alto que a las columnas ligadas, puesto que éstas poseen una mayor ductilidad y resistencia *(C. 9. 3. 1.)*. Se dice que el esfuerzo de trabajo del zuncho para el porcentaje modificado corresponde a una deformación unitaria mínima de $\xi_{cu} = 0{,}002$.

Las normas limitan, la CARGA AXIAL MAXIMA de una columna en compresión de acuerdo a lo siguiente.

1.5 CARGA AXIAL MAXIMA PERMITIDA

La máxima carga axial en columnas, está restringida de acuerdo a un porcentaje de la máxima carga axial pura que es capaz de resistir la sección de concreto y acero, por lo tanto las siguientes expresiones son las permitidas como máxima carga axial.

Para columnas zunchadas

$$P_{máx} = P_u = 0{,}85\varnothing \left[0{,}85\, f'_c\, (A_g - A_{st}) + A_{st}\, f_y\right] \qquad (A.\ 10.\ 3.\ 4.\ 1.)$$

Para columnas ligadas

$$P_{máx} = P_u = 0{,}80\varnothing \left[0{,}85\, f'_c\, (A_g - A_{st}) + A_{st}\, f_y\right] \qquad (A.\ 10.\ 3.\ 4.\ 2.)$$

Esta disminución es debido a que las nuevas normas excluyen las excentricidades mínimas, excepto en los caso de esbeltez. Estas cargas axiales máximas equivalen a la carga axial de las columnas zunchadas y ligadas que resistirían con los momentos provenientes de las excentricidades mínimas del 5% del diámetro y del 10% del lado respectivamente

1.6 NORMAS Y CRITERIOS DE DISEÑO

1.- El área de refuerzo longitudinal para miembros sujetos a compresión no debe ser menor de 0,01 ni mayor de 0,08 veces el área total de A_g de la sección. *(A. 10. 9. 1.)*

2.- El número de cabillas para el refuerzo longitudinal en miembros sujetos a compresión será:

a- Para elementos zunchados: 6 cabillas
b- Para elementos ligados: 4 cabillas *(A. 10. 9. 2.)*

3.- En miembros en compresión, ligados o zunchados, la separación entre el refuerzo no será menor de 1,5 Ø, ni de 4 cm, donde Ø = Diámetro de la cabilla longitudinal. *(A. 7. 6. 3.)*

4.- No se permiten paquetes de más de 3 cabillas. *(A. 7. 6. 6. 2.)*

5.- Las cabillas del paquete estarán firmemente amarradas a la esquina de la ligadura que las circundan. *(A. 7. 6. 6. 2.)*

6.- El recubrimiento mínimo será: *(A. 7. 7. 1.)*

a- Para elementos en contacto con el suelo y expuestos a él: 7,0 cm
b- En condiciones normales: 4,0 cm

7.- El recubrimiento mínimo para los paquetes de cabillas será igual al diámetro equivalente del paquete, pero no mayor de 5 cm. *(A. 7. 7. 3.)*

8.- Las cabillas longitudinales que tengan que doblarse debido a una reducción de la sección de la columna en un nodo, tal como en la Fig 1.12 deben cumplir que:

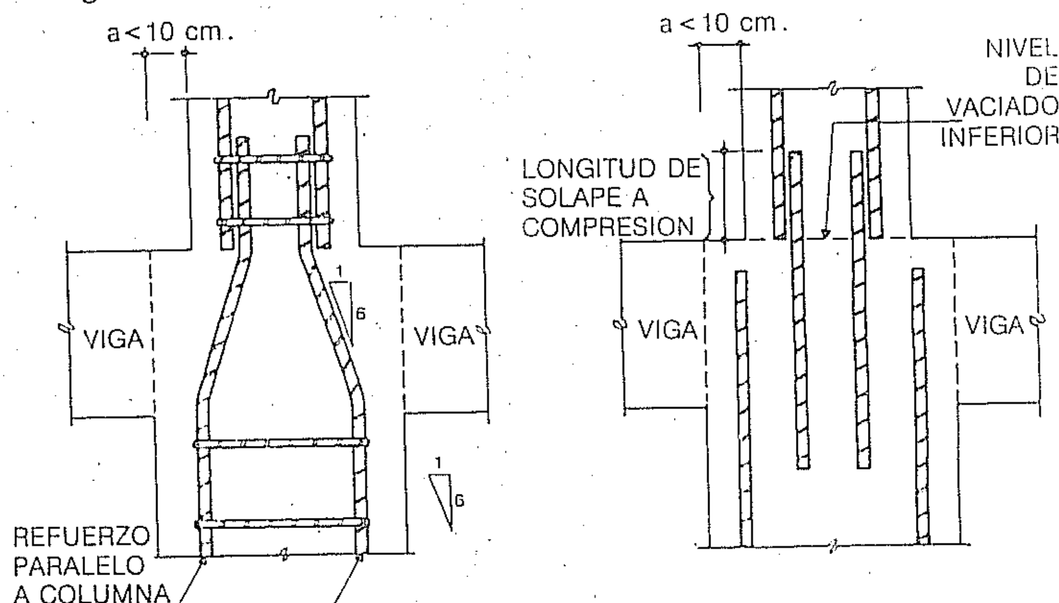


Figura 1.12

a- Las pendientes de la inclinación de la cabilla no será mayor de 1 a 6 respecto al eje de la columna. *(A. 7. 8. 1. 1.)*

b- Fuera del nodo donde se genera el doblez, las cabillas deben ser paralelas al eje de la columna. *(A. 7. 8. 1. 2.)*

c- Cuando la cara de una columna está desalineada por cambio de sección en más de 10 cm., respecto a otra columna, no se doblarán las cabillas, sólo se permiten espigas que conecten una columna a la otra. *(A. 7. 8. 1. 5.)*

9.- Para miembros zunchados en compresión aislados (no embutidos) los límites exteriores de la sección (las dimensiones) se tomarán a una distancia más allá del límite exterior de los zunchos igual al recubrimiento, es decir el núcleo más el recubrimiento. *(A. 10. 8. 1.)*

10.-Para miembros en compresión vaciado monolíticamente con muros, los límites de la sección transversal efectiva de un miembro será un círculo de por lo menos 4 cm. mayor que el núcleo de dicho miembro o como un cuadrado o rectángulo cuyos lados sean por lo menos 4 cm. por fuera del zuncho. *(A. 10. 8. 2.)*

11.-La máxima separación libre entre cabillas longitudinales sin estar cercadas por ligaduras será de 15 cm. medidos en la dirección de las caras, ver Fig. 1.13. *(A. 7. 10. 5. 3.)*

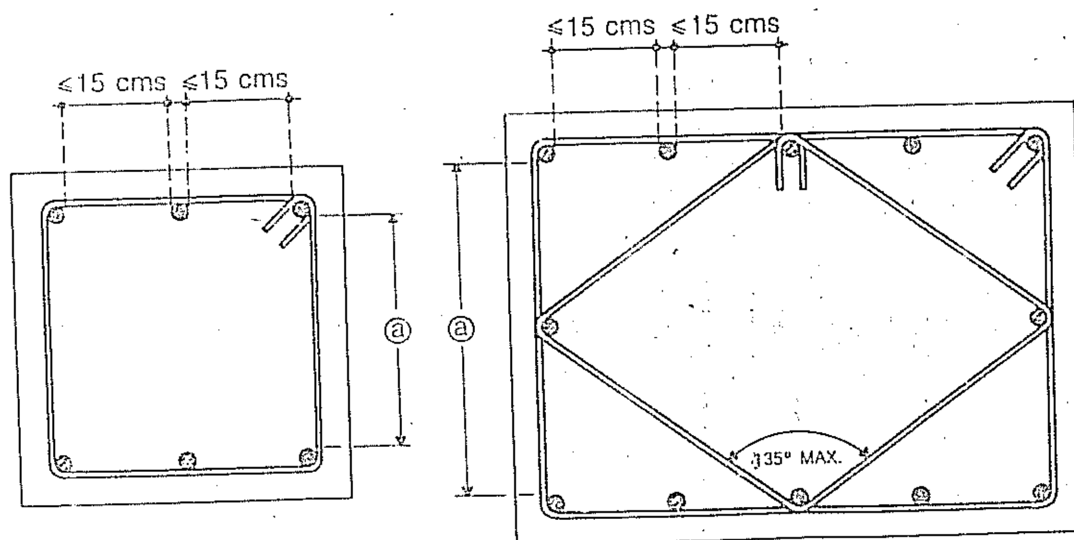


Figura 1.13

12.-Se permite para el diseño formar una sección equivalente circular de diámetro igual a la menor dimensión lateral de la sección verdadera, sea esta cuadrada, rectangular o cualquier forma, el acero y la resistencia se basarán en la sección equivalente. *(A. 10. 8. 3.)*

13.-Si un miembro trabajado a compresión tiene una sección mayor de la necesaria requerida por efecto de las cargas, se puede utilizar una sección gruesa reducida Ag nunca menor que la mitad de área total, para el cálculo del acero mínimo y la resistencia. *(A. 10. 8. 4.)*

14.-No se normaliza el área mínima de concreto, sin embargo el ACI 318–63 definió 600 cm². como área mínima de concreto. *(Art. 912. a)*

15.-No se normaliza dimensiones mínimas, sin embargo el ACI 318–63 definió:

Para columnas circulares, diámetro 25 cm.
Para columnas rectangulares, lado mínimo 20 cm. *(Art. 912. a)*

1.7 NORMAS Y CRITERIOS PARA EL DISEÑO SISMICO

1.-Para aplicar los siguientes criterios de diseño se debe cumplir:

a.- La carga axial mayorada de diseño debe ser mayor que 0,1 f'c Ag *(A. 18. 3. 1. a.)*

b.- La menor dimensión de la columna será 30 cm. *(A. 18. 3. 1.)*

c.- La relación entre el ancho b y la altura h de la sección b/h no será inferior a 0,4 . *(A. 18. 3. 1. b.)*

2.- El área de ancho longitudinal no será menor de 0,01 ni mayor de 0,06 veces el área de A_g de la sección de la columna. *(A. 18. 3. 3. 2.)*
Se recomienda no exceder de 0,04 veces al área A_g de la columna, para evitar congestionamiento de anchos.
(No normalizado, opinión del Autor.)

3.- Los empalmes por solapes sólo se permiten en la mitad de la luz libre del miembro y se diseñarán a tracción. *(A. 18. 3. 3. 3.)*

4.- La longitud de solape L_s del refuerzo longitudinal será:
$L_s = 30\ Ø_{cab} \geq 40cm.$ Donde $Ø_{cab}$ = Diámetro de la cabilla.
(No normalizado, opinión del Autor.)

CAPITULO II

Flexo – Compresión

2.1 INTRODUCCION

Tal como se comentó anteriormente las solicitaciones axiales, flectoras y cortantes no actúan en las estructuras indepedientemente, ya que la hiperestaticidad obliga a solicitarlas en combinación unas con otras, el presente capítulo integra los conceptos emitidos de compresión axial pura con la flexión pura respecto a un eje.

2.2 FLEXO – COMPRESION UNI-AXIAL

La flexo–compresión en las columnas se puede expresar de dos formas, como en la Fig. 2.1, es decir, como el efecto de una fuerza axial P y el de un momento flector M ó como el efecto de una carga axial P excéntrica respecto a dicho eje.

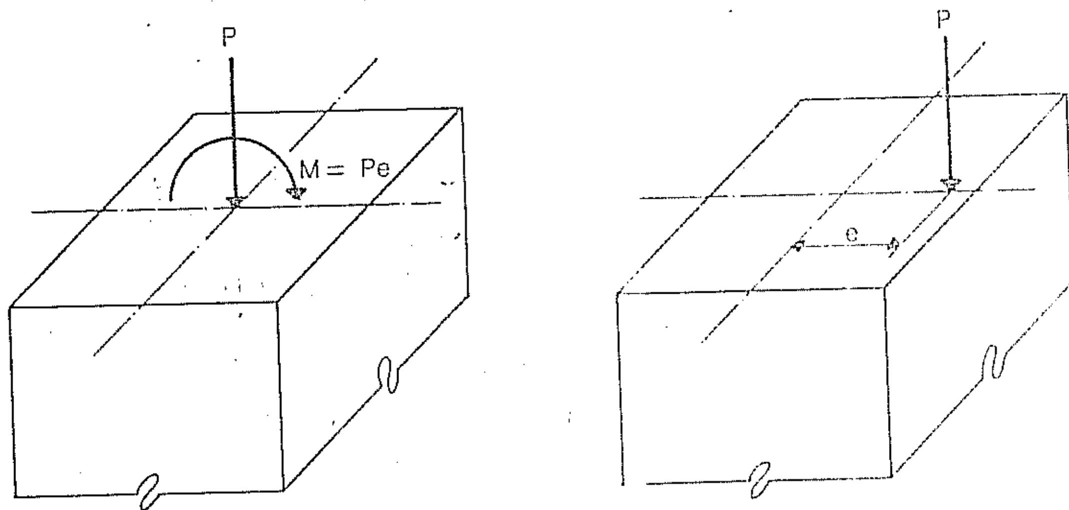


Figura 2.1

2.3 DIAGRAMA DE INTERACCION

Si una sección es solicitada a flexo–compresión, es posible obtener un gráfico por medio de dos ejes perpendiculares, en el vertical se indican las cargas axiales y en el horizontal los momentos flectores, se genera una curva en la cual es posible leer el comportamiento que tiene la pieza, la parte interna de la misma representa el comportamientos de combinaciones de cargas sin llegar a condiciones últimas, la parte exterior de la curva representa condiciones de cargas que el miembro no puede resistir sin haber fallado antes y por último la curva misma expresa las condiciones últimas de flexión y compresión respecto al comportamiento de la pieza, luego, se puede emitir la definición siguiente de diagrama de interacción.

Es el lugar geométrico que define la relación entre la carga axial **P** y el momento flector M que producen las condiciones límites de capacidad resistente, es decir la rotura de una sección.

Para una sección definida por su geometría Ag, conocidos los materiales f'c y fy , conocidos los aceros As y su ubicación en la sección o lo que es lo mismo el recubrimiento r, se puede obtener una curva única que relaciona el momento flector M y la carga axial **P** en condiciones de agotamiento resistente.

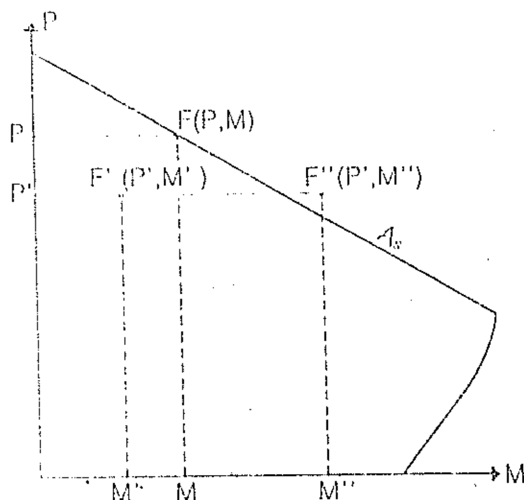


Figura 2.2

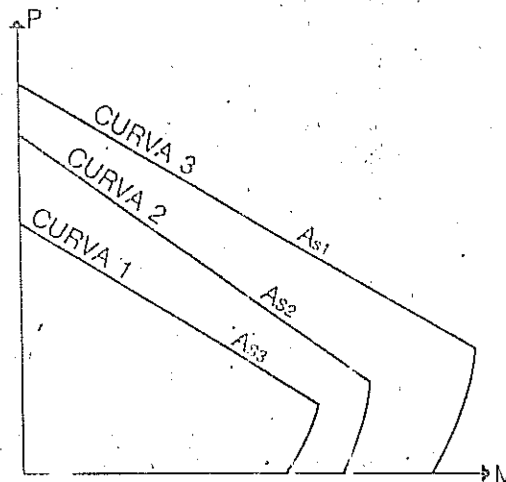


Figura 2.3

La curva que se ve en la Fig. 2.2. es el diagrama de interacción de una columna, curva que es única para las cinco características anteriormente nombradas Ag, As, f'c, fy y r, ya que si se modifica unos de estos parámetros la curva se manifestaría con otra pendiente. El punto F en la curva representa el comportamiento a rotura de la pieza, el punto F' representa

estados de cargas menores a la falla en rotura y el punto F" representa situaciones de cargas en la que la columna no resistiría.

En la gráfica de la Fig. 2.3 se observa como pueden variar las curvas a medida que se modifican los parámetros que las componen, a manera de ejemplo se comentarán las curvas (1), (2) y (3) de la Fig. 2.3.

La curva (1) se toma como patrón con los parámetros de A_g, A_{s1}, f'_c, f_y y r, conservando estos parámetros fijos y variando sólo el concreto f'_c para la curva (2), ésta cambia de pendiente respecto a la anterior, luego, si a la curva (3) se le varía sólo el parámetro área de acero A_{s3} se observa que ésta es paralela a la (1), aunque por encima.

La Fig. 2.4 muestra un diagrama de interacción donde un punto (A') cualquiera (en la curva) representa una combinación de momento y carga axial que hace que la columna alcance su resistencia máxima o rotura. El

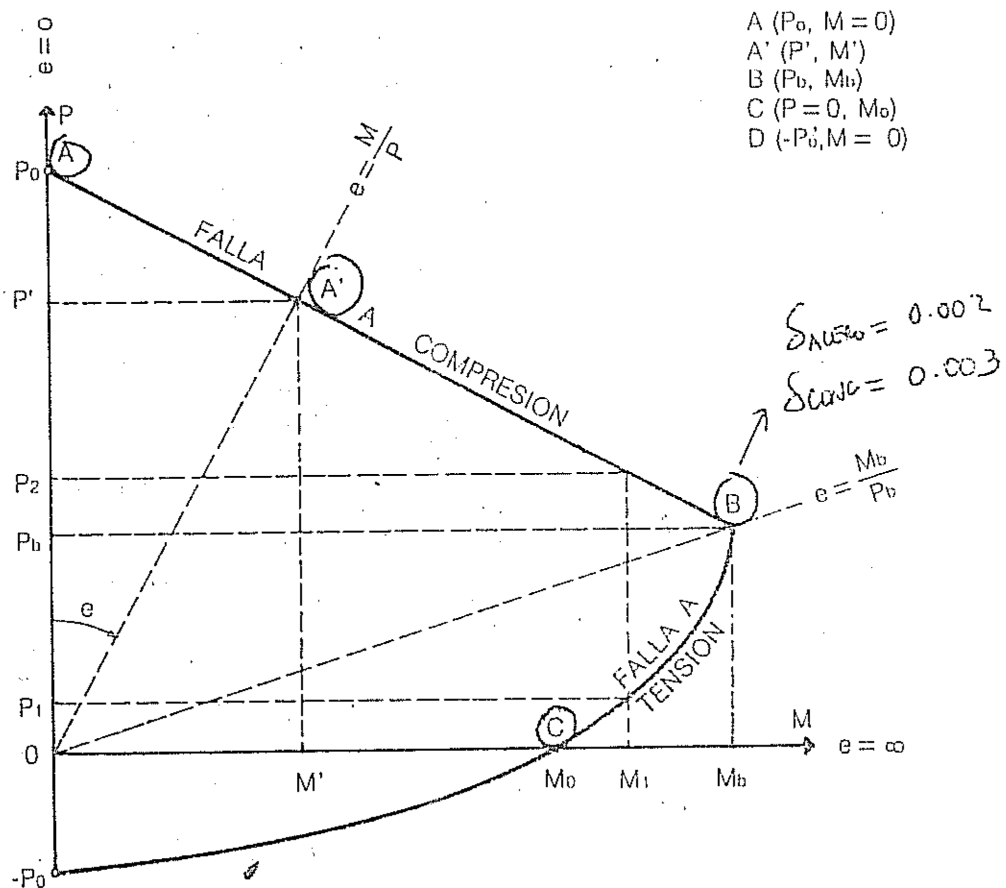


Figura 2.4

punto A representa la carga axial máxima de compresión que es capaz de resistir sin momento aplicado, así mismo, el punto C representa el momento flector puro que resiste sin aplicación de carga axial alguna, y el punto B representa la condición balanceada, es decir, el momento flector y la carga axial que resistiría para cuando el concreto y el acero fallan simultáneamente para deformaciones unitarias de 0,003 y 0,002 respectivamente, o sea, cuando el concreto comienza a triturarse y el acero comienza a ceder. Es de notar que el máximo momento en la sección no corresponde a la carga axial nula ya que hay un regreso en la curva manifestada por el tramo BC, lo que hace que en cierta posición de momento flector M_1 la columna puede tener la posibilidad de resistir dos cargas axiales compresión P_1 y P_2, una carga axial a compresión P_1 en la zona de falla en tensión y una carga P_2 en la zona de falla a tracción. Así mismo, se puede observar el comportamiento en el punto C, en la cual la carga axial a tensión es nula y el momento flector es puro, también se puede representar la relación entre M y P como la excentricidad e para las combinaciones de cargas posibles, por ejemplo, la recta AA' manifiesta la generalidad de las excentricidad $e = M/P$, la relación de cargas para la excentricidad $e = 0$ coincide con las coordenadas de carga axial pura y la relación de cargas para la excentricidad $e = \infty$ coincide con la coordenada de carga axial nula y momento flector puro.

2.4 COMPORTAMIENTOS Y TIPOS DE FALLAS

Hay dos tipos de fallas en los elementos sujetos a flexo–compresión: la falla a compresión y la falla a tracción. Se define la falla a compresión cuando el concreto falla por trituración y los aceros pueden estar cediendo

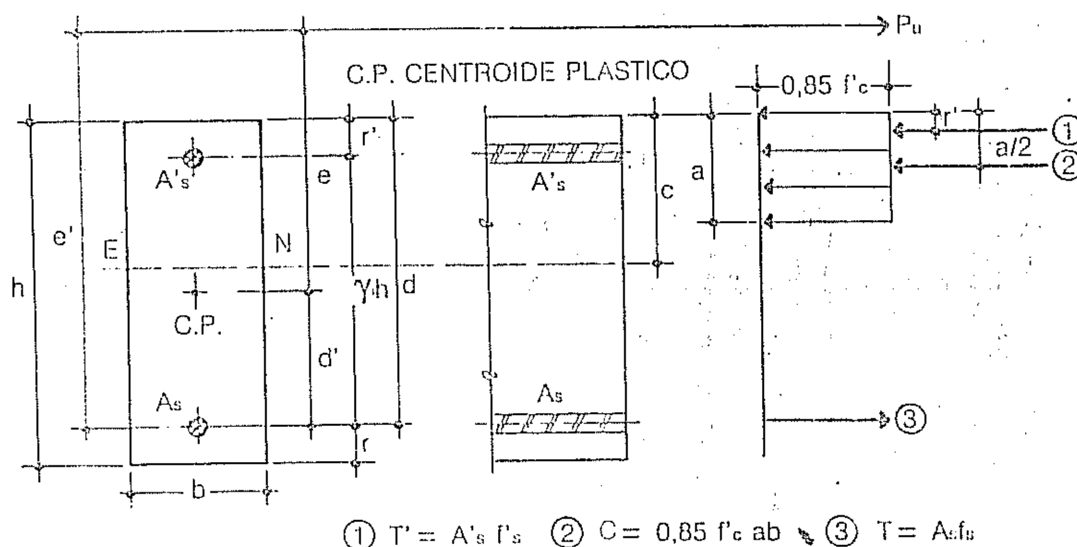


Figura 2.5

o no a compresión, esta falla se representa a lo largo de la curva AB en la Fig 2.4 y la falla a tensión ocurre cuando el acero de la zona de tensión cede y el concreto ha fallado al aplastamiento, correspondiendo esta falla a la curva BC es la Fig 2.4 . En esta misma figura se puede destacar los puntos A, B y C, los cuales fueron discutidos anteriormente y característicos para cualquier diagrama de interacción.

A continuación se desarrollan las expresiones de comportamiento, para una columna rectangular con acero simétrico repartido en cada cara, es decir $A_s = A'_s$, tal como en la Fig. 2.5 se puede ver.

2.5 FORMULAS GENERALES

En las siguientes expresiones no se le ha descontado el área de concreto que ocupan los aceros a compresión en la sección.

Ecuación de equilibrio de fuerzas , haciendo $\Sigma P = 0$

$$P_u = \varnothing \left[0{,}85\ f'_c ab + A'_s f'_s - A_s f_s \right]$$

Ecuación de equilibrio de momentos $\Sigma M = M_u$, respecto al centroide plástico:

$$M_u = P_u e = \varnothing \left[0{,}85\ f'_c ab \left(d - d' - \frac{a}{2}\right) + A'_s f'_s (d - r' - d') + A_s f_s d' \right]$$

Ecuación de momentos, respecto al acero tendido: (A_s)

$$P_u e' = \varnothing \left[0{,}85\ f'_c ab \left(d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f'_s \ (d - r') \right]$$

2.6 CENTROIDE PLASTICO

Se define centroide plástico como el centro de la resistencia de la sección o centros de fuerzas cuando ésta es comprimida a una deformación $\varepsilon_{cu} = 0{,}003$ es decir, a un esfuerzo en el concreto de $0{,}85\ f'_c$ y en el acero a f_y , en otras palabras, el centroide plástico es donde está aplicada la carga axial pura en compresión para condiciones de agotamiento resistente. Luego, se puede dar la siguiente expresión general, medido a partir del acero tendido para una sección sometida a carga axial pura, tomando momento estático respecto al área de acero tendido. $\Sigma M_{A_s} = 0$

$$d' = \frac{0{,}85\ f'_c bh \left(d - \frac{h}{2} \right) + A'_s f_y (d - r')}{0{,}85\ f'_c bh + (A_s + A'_s) f_y}$$

Como $d = h/2\ (1 + \gamma)$ y $d - r = \gamma h$ para una columna rectangular y sustituyendo en la expresión de d'

$$d' = \frac{\gamma}{2}\ \frac{0{,}85\ f'_c bh^2 + A_{st}\, f_y\, h}{0{,}85\ f'_c bh + A_{st}\, f_y} = \frac{\gamma h}{2}\ \frac{0{,}85\ f'_c bh + A_{st}\, f_y}{0{,}85\ f'_c bh + A_{st}\, f_y} = \frac{\gamma h}{2}$$

Es decir, en una columna rectangular con acero simétrico en cada cara, el centroide plástico coincide con el centro de gravedad de la sección, sin embargo esto no es verdad para columnas de otras formas geométricas.

Fórmulas Generales Simplificadas para columnas rectangulares con acero iguales en sus extremos donde se cumpla que $A_s = A'_s$ y $A_{st} = A_s + A'_s$

$$P_u = \varnothing\left[0{,}85\ f'_c ab + \frac{A_{st}}{2}(f'_s - f_y)\right]$$

$$M_u = P_u\, e = \varnothing\left[0{,}85\ f'_c\, ab\,\frac{1}{2}(h - a) + A'_s\, f_y\,\frac{\gamma h}{2} + A'_s\, f_y\,\frac{\gamma h}{2}\right]$$

Respecto al centroide plástico.

$$P_u\, e' = \varnothing\left[0{,}85\ f'_c\, ab\,\frac{1}{2}(h\ \ (1 + \gamma) - a) + A'_s\, f'_s\,\gamma\, h\right]$$

PUNTO A

Corresponde a una carga axial pura de compresión, en condiciones de agotamiento resistente, es decir, a una deformación unitaria $\varepsilon_{cu} = 0{,}003$, el acero se encuentra cediendo aunque en compresión, no hay momento flector ya que la excentricidad de la carga P_o es nula por coincidir en el centroide plástico, tal como en la Fig. 2.6 se puede observar.

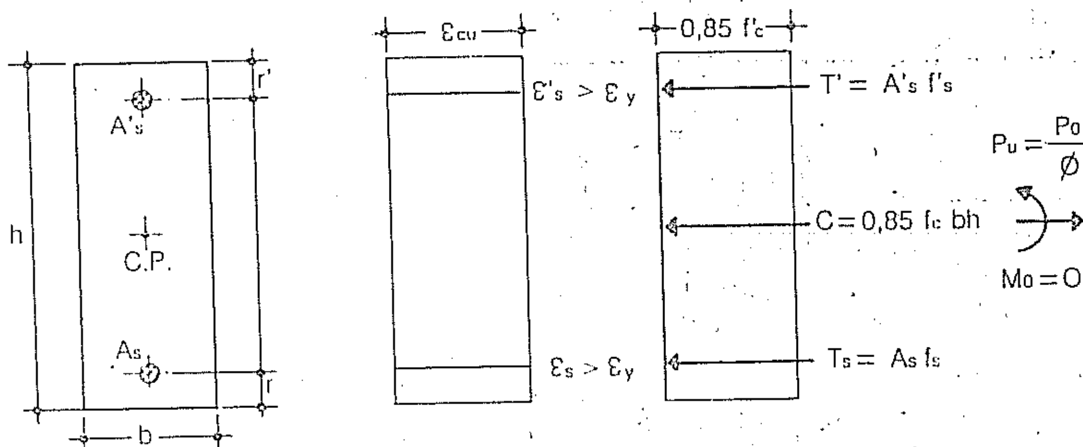


Figura 2.6

Como ya se sabe, se cumple la ecuación conocida.

$P_o = 0{,}85\, f'_c A_g + A_{st} f_y = 0{,}85\, f'_c bh + A'_s f_y + A_s f_y$ y,

$P_u = \emptyset\,(0{,}85\, f'_c bh + A'_s f_y + A_s f_y)$ *(C.10.3.1.)*

Este punto A no se permite para el diseño, utilizándose sólo para la construcción de la curva.

PUNTO B
Corresponde a la falla balanceada, existe un estado de deformaciones para el concreto $\xi_{cu} = 0{,}003$ y para el acero $\xi_y = 0{,}002$, es decir el concreto comienza a triturarse simultáneamente con el acero el cual comienza a ceder, ver la figura 2.7.

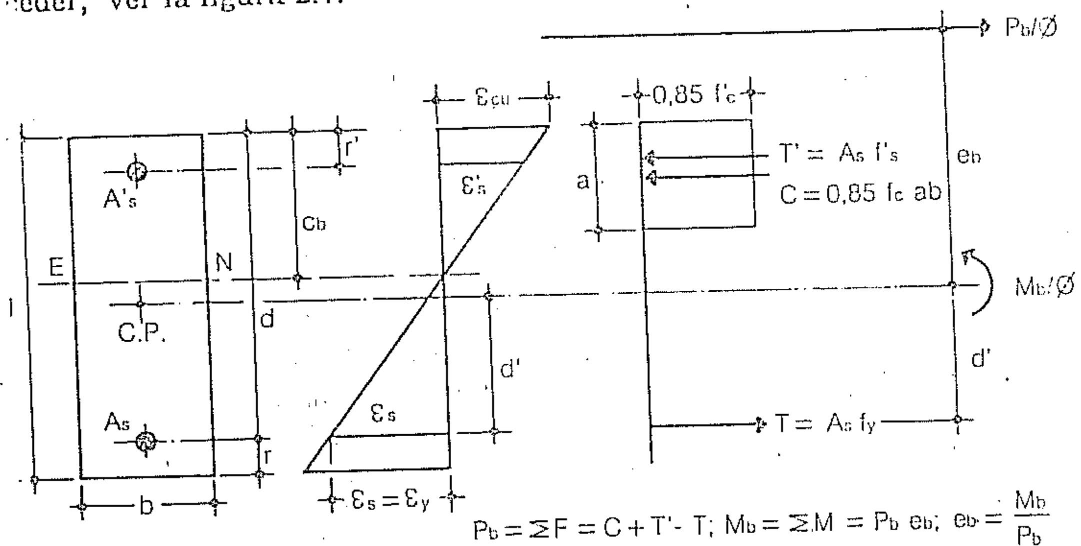


Figura 2.7

Por relaciones de triángulos semejantes

$$\frac{\xi_{cu}}{c_b} = \frac{\xi_y}{d - c_b} = \frac{\xi_{cu} + \xi_y}{d} \Rightarrow c_b = \frac{\xi_{cu}}{\xi_{cu} + \xi_y}\, d$$

Se recuerda que según las normas, se tiene que,

$$\xi_{cu} = 0{,}003 \quad \xi_y = \frac{f_y}{E_s} \quad y \quad E_s = 2{,}1 \times 10^6 \,\mathrm{K/cm^2}$$

Tomando sumatoria de momentos alrededor del centroide plástico de las fuerzas que actúan, las ecuaciones de equilibrio se manifiestan así.

$P_b = \emptyset\,(0{,}85\, f'_c\, a_b\, b + A'_s f'_s - A_s f_y)$ y,

$$M_b = P_b e_b = \emptyset\left[0{,}85 f'_c\, a\, b\left(b - d' - \frac{a_b}{2}\right) + A'_s f'_s\,(d - r - d') + A_s f_y d'\right]$$

O mejor:

$$M_b = \emptyset\left[0{,}85f'_c\, a_b\, b\left(d - d' - \frac{a_b}{2}\right) + A_{st}\, f_y\, \gamma h\right]$$

Se despejan las expresiones para cuando el acero a compresión se encuentra cediendo y por relaciones de triángulos, se tiene que,

$$\xi'_s = \xi_{cu}\frac{c_b - r}{c_b} = \xi_{cu}\left(1 - \frac{6.300 + f_y}{6.300}\right)\frac{r}{d} > \xi_y = \frac{f}{E}$$

Sustituyendo en Pb.

$$P_b = \emptyset\left[0{,}85^2\, f'_c\left(\frac{6.300}{6.300 + f_y}\right)\frac{1+\gamma}{2}\right] bh \qquad \text{y,}$$

$$M_b = P_b e_b = \emptyset\left[0{,}85\, f'_c\left(\frac{6.300}{6.300 + f_y}\right)\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \text{x} \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \text{x}\left(1 - \frac{6.300}{6.300 + f_y}\, 0{,}425\,(1+\gamma)\right) bh^2 + \frac{A_{st}\, f_y\, \gamma h}{2}\right]$$

No se acostumbra a trabajar sin el acero a compresión cediendo, para lo cual se asegura la cedencia del A'_s si se cumple que $c \geq 1{,}5\, h\,(1-\gamma)$

PUNTO C

Corresponde a una carga axial cero y una excentricidad infinita $e = \infty$, lo cual implica momento flector puro, existe un estado de deformaciones en el concreto $\xi_{cu} = 0{,}003$ y en la zona de tensión de la sección el acero ya ha cedido con deformaciones mayores a la cedente $\xi_s > \xi_y = f_y/E_s$, ver Fig. 2.8.

Se cumplen las ecuaciones siguientes, $\Sigma F = 0 = C_c + T' - T$

$$\Sigma F = 0 = 0{,}85\, f'_c ab + A'_s\, f'_s - A_s\, f_y$$

Donde $f'_s = \xi'_s E_s$ pero $\xi'_s = \xi_{cu}\dfrac{c - r}{c} = \xi_{cu}\dfrac{a - 0{,}85\,r}{a}$ luego sustituyendo

$$0{,}85 f'_c ab + A'_s\,\xi_{cu}\frac{a - 0{,}85\,r}{a} E_s - A_s f_y = 0$$

y como $A'_s = A_s$, se tiene:

$$0{,}85\, f'_c ab + A_s\,\xi_{cu}\frac{a - 0{,}85\,r}{a} E_s - A_s f_y = 0$$

despejando "a" y sustituyendo $E_s = 2{,}1 \times 10^6$ K/cm² y $\xi_{cu} = 0{,}003$ se tiene entonces la ecuación cuadrática,

$$a^2 + \frac{As\,(6.300 - fy)}{0{,}85\, f'_c b}\, a - \frac{5.355\, As\, r}{0{,}85\, f'_c\, b} = 0$$

Obteniendo "a" se puede calcular la distancia del eje neutro c = a/0,85, la cual hace que la carga de compresión P sea nula, en este caso el momento flector puro se obtiene tomando sumatoria de momento alrededor del acero tendido de la sección.

$$Mo = Ø\left[0{,}85\, f'_c ab\left(d - \frac{a}{2}\right) + As\, f'_s(d - r)\right]$$

Como ya se conoce la distancia "a" y también el esfuerzo f'c se sustituyen estos valores en la ecuación.

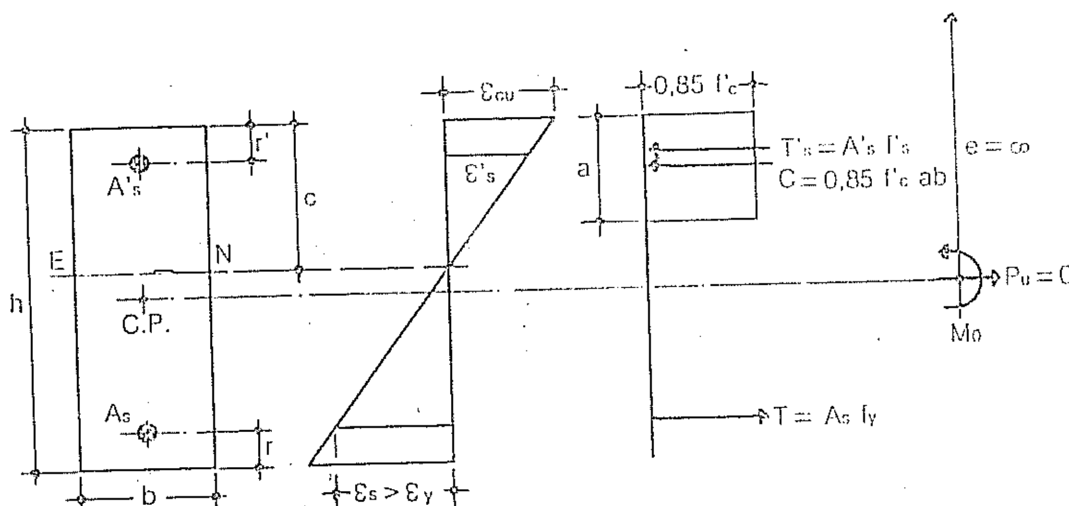


Figura 2.8

Como ya son conocidas las coordenadas de cada posición, los puntos intermedios a los definidos servirán de guía para la construcción de la totalidad de la curva, es clave y de suma importancia para estos puntos intermedios el valor conocido de "c" o distancia del eje neutro para los puntos A, B, y C, para construir la totalidad de las curvas será suficiente determinar para la rama de falla a compresión AB un punto intermedio y la rama de falla tensión BC dos puntos intermedios.

Es posible determinar los tipos de fallas de una columna si se conoce la magnitud de la carga última que va a actuar al compararse esta carga con la carga balanceada, ya que la carga balanceada define los linderos en el diagrama de interacción entre la falla a compresión o a tensión, así mismo, se sabe que la distancia "c" del eje neutro a la fibra más comprimida

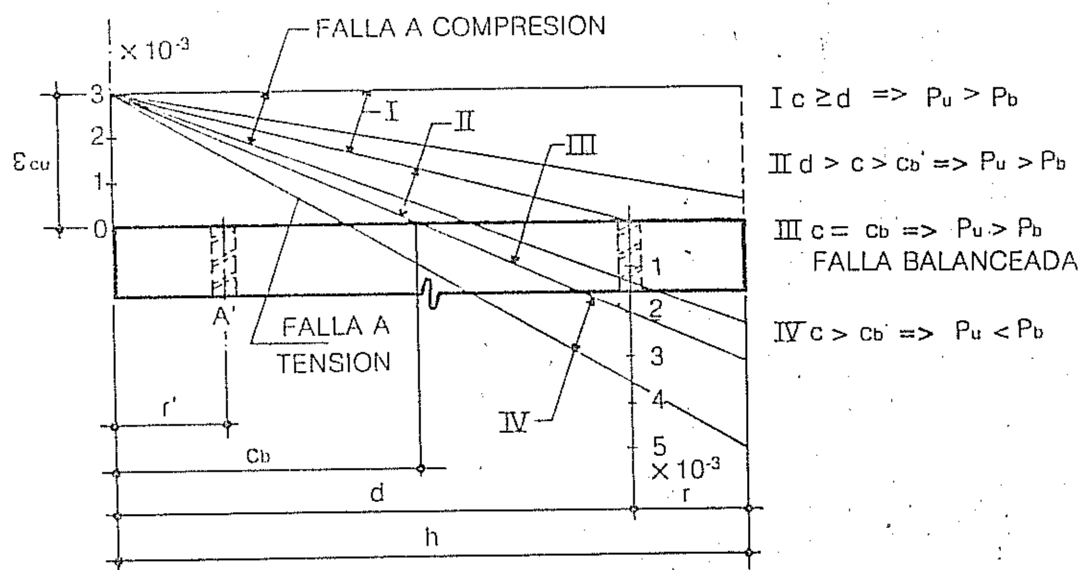


Figura 2.9

es directamente proporcional a la capacidad resistente de carga axial a compresión de la columna, lo cual se puede ver en la Fig. 2.9.

2.7 FALLA A COMPRESION

Se caracteriza esta falla porque $P_u > P_b$, se puede dividir en dos zonas claramente definidas, la falla I y la falla II.

2.7.1 FALLA I

La falla I, se caracteriza porque el eje neutro está fuera de la sección, es decir $c > d$ razón por lo que las ecuaciones de carga axial no se podrán aplicar para diseño, aunque sí para la construcción de la curva del diagrama, es por esto, que las normas limitan la carga axial a compresión a un valor máximo dependiendo del tipo de columnas.

PARA COLUMNAS ZUNCHADAS

$$P_u = P_{máx} = 0{,}85\, Ø\, (0{,}85 f'_c\, A_g + A_{st}\, f_y) \qquad \textit{(A. 10. 3. 5. 2.)}$$

PARA COLUMNAS LIGADAS

$$P_u = P_{máx} = 0{,}80\, Ø\, (0{,}85 f'_c\, A_g + A_{st}\, f_y) \qquad \textit{(A. 10. 3. 5. 1.)}$$

Estas ecuaciones son aproximadamente iguales a los valores de carga axial que pueden resistir una columna con las excentricidades mínimas que las normas[1] anteriores recomendaron para columnas zunchadas 5% del diámetro (0,05 D) y para las ligadas 10% del lado (0,10 h) y que las

(1) ACI 318-71

nuevas normas las excluyeron Sin embargo las nuevas normas[2] fijan una excentricidad mínima de $e_{mín} = (1,5 + 0,3\ h)$ cm. para el diseño por esbeltez y no por flexión *(A. 10. 11. 5. 4.)*

2.7.2 FALLA II

A la falla II se le llama también falla a compresión porque $P_u > P_b$, el acero tendido ha comenzado a trabajar en tensión pero no a cedencia, por lo cual se cumplen entonces las ecuaciones siguientes.

$$P_u = \text{Ø}\left[0{,}85\ f'_c\ ab + A'_s\ f'_s - A_s\ f_s\right] \quad \text{y,}$$

$$M_u = P_u\ e = \text{Ø}\left[0{,}85 f'_c ab \frac{1}{2}(h - a) + A'_s f'_s \frac{h}{2} + A_s f_s \frac{h}{2}\right] \quad \text{ó,}$$

$$P_u\ e' = \text{Ø}\left[0{,}85\ f'_c\ ab \frac{1}{2}(h\ (1 + \gamma) - a) + A'_s\ f'_s\ \gamma h\right] \text{ (respecto al acero tendido)}$$

Ecuaciones que se pueden simplificar suponiendo que $A'_s = A_s$

$$P_u = \text{Ø}\left[0{,}85\ f'_c\ ab + A'_s\ f'_s - A_s\ f_s\right] \quad \text{y,}$$

$$M_u = P_u\ e = \text{Ø}\left[0{,}85\ f'_c\ ab \frac{1}{2}(h - a) + \frac{A_s\ h}{2}(f'_s - f_s)\right]$$

$$P_u\ e' = \text{Ø}\ 0{,}85\ f'_c ab \frac{1}{2}(h + (1 + \gamma) - a) + A_s\ f'_s \gamma h \quad \text{(respecto al acero tendido)}$$

$$f_s = \xi_s E_s = \xi_{cu} \frac{d - c}{c} E_s = \xi_{cu} \frac{0{,}85\ d - a}{a} E_s \Rightarrow f_s = \xi_{cu} \frac{a - 0{,}425\ (1 + \gamma)\ h - a}{a} E_s$$

$$f'_s = \xi'_s E_s = \xi_{cu} \frac{c - r}{r} E_s = \xi_{cu} \frac{a - 0{,}85\ r}{a} E_s \Rightarrow f'_s = \xi_{cu} \frac{a - 0{,}425\ (1 - \gamma)\ h}{a} E_s$$

Sustituyendo f_s y f'_s en las ecuaciones simplificadas, se tienen dos ecuaciones con dos incógnitas para así obtener el valor de "a", esto genera ecuaciones complicadas con solución no sencilla por la cantidad de operaciones ya que se obtendría una ecuación cúbica.

Se puede resolver el problema por métodos aproximados, siendo el caso más usado por su casi exactitud, la llamada expresión de momento de Whitney[3] $M_u = bd^2 f'_c/3$ propuesta en 1937 para el caso de aceros simétricos $A_s = A'_s$ y para cuando el porcentaje de acero es mayor que el porcentaje de acero balanceado $P_b = 0{,}456\ f'_c/f_y$.

(2) ACI 318-85 y COVENIN-MINDUR 1753-85

Tomando sumatoria de momentos respecto al acero tendido:

$\Sigma M=0 \Rightarrow Pu\ e = Mc + M's$

Donde, Mc = Momento debido al concreto

$M's$ = Momento debido al acero a compresión

$$Pu\ e = \varnothing\left[0{,}333 f'c\, b d^2 + A's\, fy\ (d - r')\right]$$

$$Pu\ e = Pu\left(e + d - d - \frac{h}{2}\right) = \varnothing\left[\frac{1}{3} b d^2 f'c + A's\, f's\right]$$

$$Pu = \varnothing\left[\frac{f'c\, bh}{\frac{3eh}{d^2} + 1{,}18} + \frac{A's\, f's}{\frac{e}{d - r} + 0{,}5}\right] \quad \text{ó,}$$

$$Pu = \varnothing\left[\frac{f'c\, bh}{\frac{3eh}{d^2} + 1{,}18} + \frac{As\, fy}{\frac{e}{d - r} + 0{,}5}\right]$$

Nota: Es necesario aceptar que $f's = fy$

Ecuación con la cual podemos determinar el área de acero para una columna solicitada por Pu y Mu, despejando el valor de As teniendo en cuenta que:

$$d = \frac{h(1 - \gamma)}{2} \Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{4}{h^2(1 - \gamma)^2} \qquad y \qquad d - r = \gamma h$$

Sustituyendo convenientemente los anteriores valores, se tiene

$$Pu = \varnothing\left[\frac{f'c\, bh}{\frac{12}{(1+\gamma)^2}\frac{e}{h} + 1{,}18} + \frac{As\, fy}{\frac{e}{\gamma h} + 0{,}5}\right]$$

Despejando el área de acero As

$$As = A's = \left[\frac{Pu}{\varnothing} - \frac{f'c\, bh}{\frac{12}{(1+\gamma)^2}\frac{e}{h} + 1{,}18}\right]\left[\frac{\frac{e}{\gamma h} + 0{,}5}{fy}\right]$$

Si la falla es a compresión tal que $Pu > Pb$, la expresión anterior de $As = A's$ es la cantidad de acero requerido para resistir las solicitaciones dadas Pu y Mu.

2.7.3 FALLA III

La falla III es la falla balanceada, la cual ha sido ampliamente discutida anteriormente, donde $P_u = P_b$ y $M_u = M_b$

2.7.4 FALLA IV

La falla IV es llamada falla a tensión porque $P_u < P_b$, en este caso el acero en tensión se encuentra cediendo, situación que continúa hasta el caso de la flexión pura, manifestándose esta falla por las siguientes ecuaciones.

$$P_u = \varnothing\left[\, 0{,}85 f'_c ab + A_s\,(f'_s - f_y)\right] \qquad y,$$

$$M_u = P_u\, e = \varnothing\left[\, 0{,}85\, f'_c ab \frac{1}{2}(h - a) + \frac{A_s \gamma h}{2}(f'_s + f_y)\right] \qquad ó,$$

$$P_u\, e = \varnothing\left[\, 0{,}85\, f'_c ab \frac{1}{2}(h\,(1 + \gamma) - a) + A'_s f'_s \gamma h\right]$$

Pero aceptando que $f'_s = f_y$ siempre que $a > 1{,}275\,(1 - \gamma)\,h$ lo cual se debe comprobar posteriormente, la expresión de carga axial queda $P_u = \varnothing\,(0{,}85\, f'_c ab)$ de donde se puede despejar "a".

$$a = \frac{P_u}{\varnothing 0{,}85\, f'_c b}$$

Sustituyendo el valor de "a" en las ecuaciones de momentos los resultados serían los mismos:

$$M_u = P_u\, e = \left[\, 0{,}85\, f'_c \frac{P_u}{\varnothing 0{,}85 f'_c b} b \frac{1}{2}\left(h - \frac{P_u}{\varnothing\, 0{,}85 f'_c b}\right) + A_s f_y \gamma h\right] \qquad o,$$

$$P_u\, e = \frac{P_u}{2}\left(h - \frac{P_u}{\varnothing 0{,}85 f'_c b}\right) + \varnothing A_s f_y h$$ =>dividiendo entre h y despejando

$$A_s = A'_s = \frac{P_u}{2\,\varnothing\, f_y}\left[\frac{2e}{h} - 1 + \frac{P_u}{\varnothing 0{,}85 f'_c bh}\right]$$

Es decir, si la falla es a tensión, porque $P_u < P_b$, la expresión anterior de $A_s = A'_s$ es la cantidad de acero requerido para resistir las solicitaciones dadas P_u y M_u.

Otra forma de enfocarlo sería despejando el valor de "a" sabiendo que el A_s está cediendo, para eso se debe cumplir que $a > 1{,}275\,(1 - \gamma)\,h$.

$a = \frac{P_u}{\emptyset 0{,}85 f'_c b} > 1{,}275\,(1-\gamma)\,h$, sustituyendo "a" en la ecuación de M_u

$$A_s = A'_s = \left[\frac{M_u}{\emptyset} - 0{,}85 f'_c\, ab\, \frac{1}{2}(h - a)\, \frac{1}{f_y \gamma h}\right]$$

Es interesante destacar de la ecuación anterior de "a" si se despeja la carga axial $P_u > 0{,}758\,(1-\gamma) f'_c bh$ es el valor de carga requerido para asegurar que A_s está cediendo, sirviendo este valor como referencia para saber si son aplicables las expresiones anteriores, si esto no sucediera, es decir, que A'_s no estuviera cediendo es necesario que se cumpla,

$$P_u = \emptyset\left[0{,}85\, f'_c\, ab + A_s (f'_s - f_y)\right]$$

Donde, $f'_s = \xi_{cu}\left(\frac{0{,}85\, d - a}{a}\right) E_s = \xi_{cu} E_s \left(\frac{0{,}8}{} \cdot \frac{h\,(1+\gamma)}{2a} - 1\right)$.

Sustituyendo f'_s en las ecuaciónes de P_u y de M_u,

$$P_u\, e = M_u = \emptyset\left[0{,}85 f'_c\, ab\, \frac{1}{2}\,(h - a) + A_s\,(f'_s - f_y)\,\frac{\gamma h}{2}\right]$$

Multiplicando la ecuación de carga axial P_u por la relación $e = M_u / P_u$ e igualándola a la ecuación de momento M_u, es posible determinar "a" de una ecuación cúbica, conocido "a" se puede despejar $A_s = A'_s$ de la ecuación de carga P_u.

En el sector de la curva de falla a tensión se presenta el inconveniente de que para flexión pura según normas el factor $\emptyset = 0{,}90$, pero para flexo-compresión el factor $\emptyset = 0{,}70$ (ligadas) y $\emptyset = 0{,}75$ (zunchadas), este cambio de factor origina un momento mayor del que resultaría de la extrapolación de la curva del diagrama a tensión si se continuara la curva con $\emptyset = 0{,}70$. De acuerdo a nuevas normas en flexo–compresión cuando la carga axial de diseño P_u es menor que la más pequeña entre $0{,}1\, f_c A_g$ o $\emptyset P_b$ el porcentaje de acero p_t proporcionado no debe exceder de $0{,}75\, p_b$

$$\text{Donde, } p_b = \frac{0{,}85^2 f'_c}{f_y}\left(\frac{6.300}{6.300 + f_y}\right) \qquad (A.\ 10.\ 3.\ 3.)$$

Entonces un punto clave del diagrama de interacción será el correspondiente para la carga balanceada P_b y para la carga $P_u = 0{,}1\, f'_c\, bh$, es decir, para valores de $P_u < 0{,}1\, f'_c\, bh$ o $P_u < P_b$ (el que sea menor de los dos). Interpretando las normas, se comienza a tener más influencia de la flexión que

de la carga axial, por lo tanto se debe considerar que la variación del factor Ø debe ser proporcionalmente variable a las cargas actuantes desde un valor de Ø = 0,70 hasta el valor para flexión pura Ø= 0,90 cuando la carga axial es nula, de acuerdo a la siguiente relación.

$$\text{Ø} = 0{,}90 - 0{,}20\frac{Pu}{Pb} > 0{,}70$$

Es decir, cuando $Pu = Pb$ el factor Ø= 0,70 y cuando $Pu = 0$ el factor es Ø = 0,90 como valores extremos tal como se vé en la Fig. 2.10.

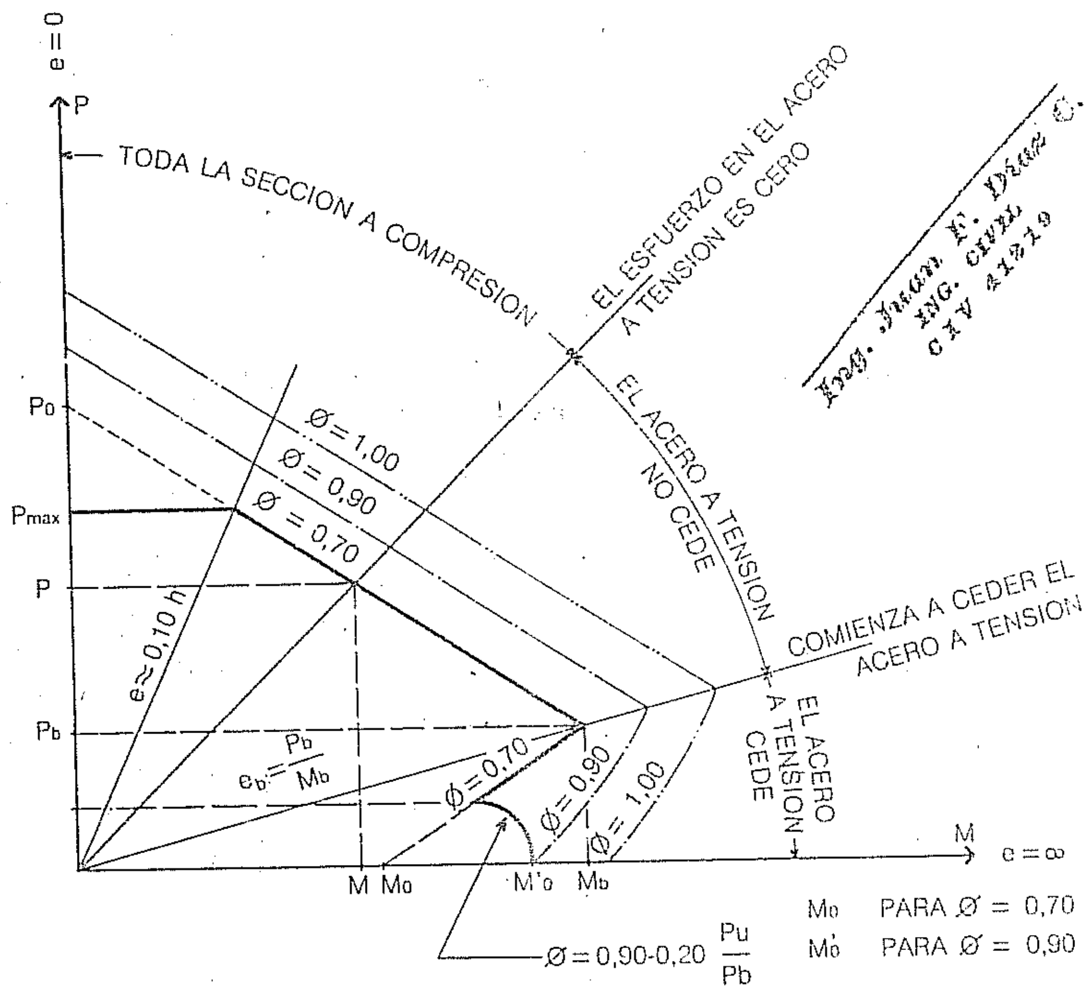


Figura 2.10

2.8 DIAGRAMA DE INTERACCION . DIMENSIONAL

Conocidas las características y paramet ›s que envuelven el diagrama de interacción, véase que cada curva es ólo para una columna con esos parámetros (recordemos que los paráme: ros de entrada para una columna con esfuerzos fijos, es decir f'_c y f_y y a emás el recubrimiento r, son P_u, M_u, e y A_s), tal como se muestra en la Fi . 2.11

Luego, si estos parámetros de entrada se convierten en adimensionales como se indica en la Fig. 2.12.

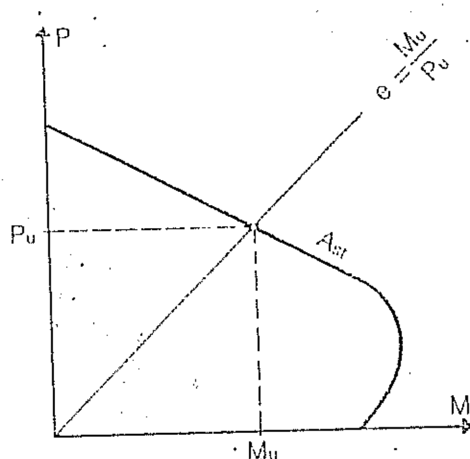


Figura 2.11

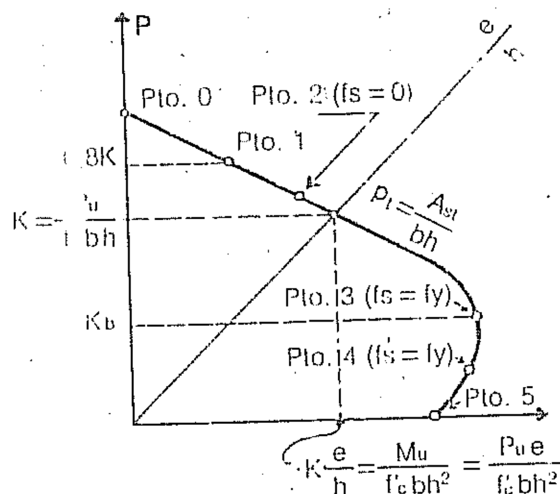


Figura 2.12

$$K = \frac{P_u}{f'_c\,bh} \qquad K\frac{e}{h} = \frac{M_u}{f'_c\,bh^2} = \frac{P_u}{f'_c\,bh}\,\frac{e}{h} \qquad p_t = \frac{A_{st}}{bh}$$

Entonces es posible simplificar y condensar en pocas curvas todas las columnas con parámetros fijos de esfuerzos en materiales y recubrimientos, es necesario destacar que las curvas adimensionales del diagrama de interacción que se encuentran en el mercado varían de acuerdo a los parámetros e hipótesis que cada autor considere, en la Fig. 2.12 se muestra el modelo de los Diagramas de Interacción Adimensionales tal como los presentó el Autor. Las ventajas de la utilización de los Diagramas de Interacción Adimensionales reside en que al entrar con los parámetros adimensionales K y Ke/h para unos esfuerzos determinados, se podrán utilizar para cualquier columna y condición de carga. Los diagramas de interacción publicados por el Autor[4] n el manual mencionado se trabajan de acuerdo a las expresiones sigui ıtes.

$$K = \frac{P_u}{f'_c\,bh} \qquad K\frac{e}{h} = \frac{P_u}{f'_c\,bh}\,\frac{e}{h} \qquad p_t = \frac{A_{st}}{bh}$$

(4) Carlos A. Landa B. "Manual d Columnas Tablas y Gráficos". 1982 U.S.M

En la Fig. 2.12, los puntos del 0 al 5 no son casuales, sino que obedecen a una razón y a unas hipótesis de trabajo, por lo cual a continuación se expone como se pueden obtener los Diagramas de Interacción para columnas rectangulares con acero distribuído en sus dos caras opuestas.

En las expresiones que se presentan, se ha descontado la parte de concreto que ocupan las áreas de acero cuando éstas están trabajando a compresión.

PUNTO 0 (P_o ; M_o ; $c_o = 0$)

Para la Fig. 2.13, tomando $\Sigma P = 0$

$$P_o = 0{,}7f'_c bh \left(0{,}85\,(1 - p) + p\,\frac{f_y}{f'_c}\right)$$

Haciendo $\Sigma M_{cp} = 0 \Rightarrow M_o = 0$

Dividiendo P_o por $f'_c bh$

$$K_o = 0{,}7\left\{0{,}85(1 - p) + p\,\frac{f_y}{f'_c}\right\}$$

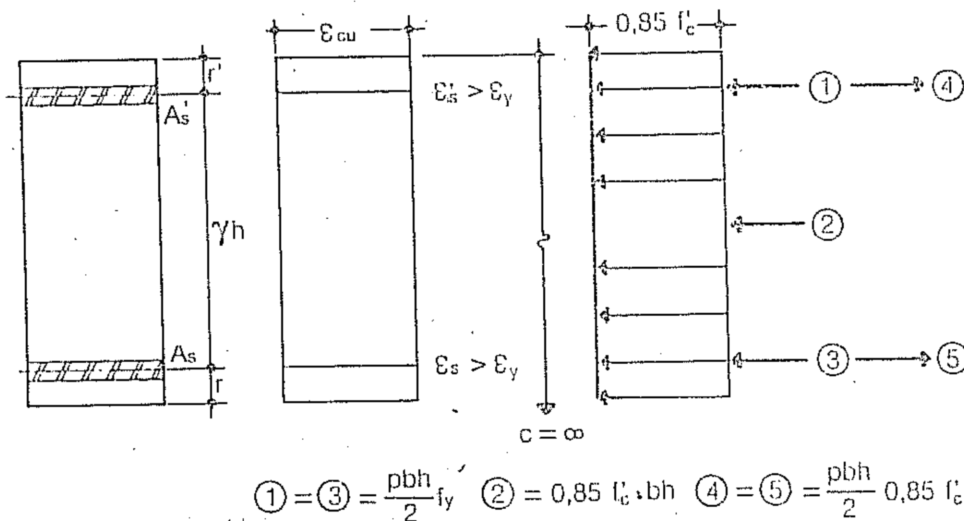


Figura 2.13

PUNTO 1 (P_1 ; M_1 ; c_1)

Para la Fig. 2.14, tomando $\Sigma P = 0$

$$P_1 = 0{,}7\left\{0{,}85\,f'_c\,bh + \frac{pbh}{2}\left[f_y - 0{,}85\,f'_c + E_s\,\xi_{cu}\,(1 - 0{,}425\,(1 + \gamma))\right]\right\}$$

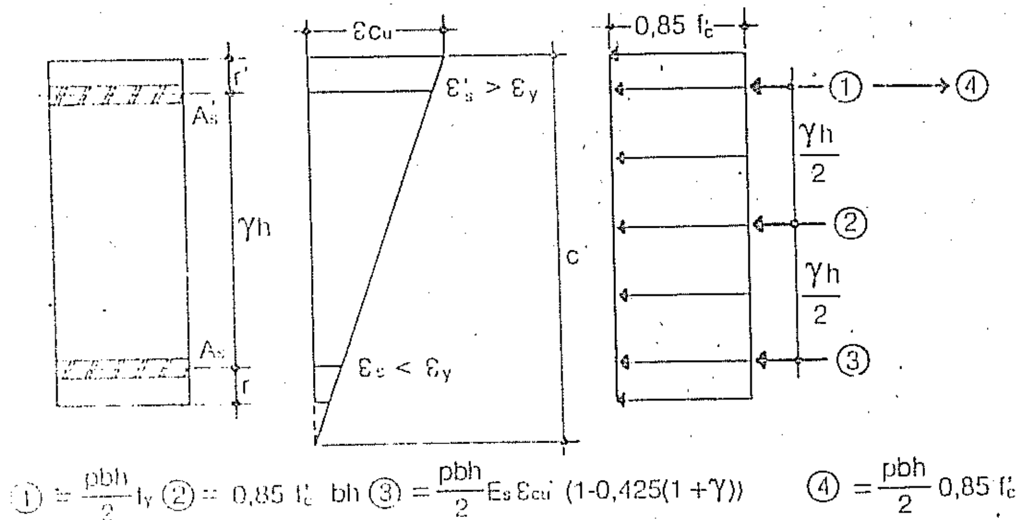
Haciendo $\Sigma M_{cp} = 0$

$$M_1 = 0{,}7\left\{\frac{pbh^2\gamma}{4}\left[f_y - 0{,}85f'_c - E_s\,\xi_{cu}\,(1 - 0{,}425\,(1+\gamma))\right]\right\}$$

Dividiendo P_1 por $f'_c bh$ y M_1 por $f'_c bh^2$,

$$K_1 = 0{,}7\left\{0{,}85 + \frac{p}{2f'_c}\left[f_y - 0{,}85f'_c + E_s\,\xi_{cu}\,(1 - 0{,}425\,(1+\gamma))\right]\right\}$$

$$\left(K\frac{e}{h}\right)_1 = 0{,}7\left\{\frac{p\gamma}{4f'_c}\left[f_y - 0{,}85\,f'_c - E_s\,\xi_{cu}\,(1 - 0{,}425\,(1+\gamma))\right]\right\}$$



$① = \frac{pbh}{2} f_y$ $② = 0{,}85\,f'_c\,bh$ $③ = \frac{pbh}{2} E_s\,\varepsilon_{cu}\,(1 - 0{,}425(1+\gamma))$ $④ = \frac{pbh}{2}\,0{,}85\,f'_c$

Figura 2.14

PUNTO 2 (P_2 ; M_2 ; e_2)

Para la Fig. 2.15, tomando $\Sigma P = 0$

$$P_2 = 0{,}7\left\{0{,}7225f'_c bh^2\frac{(1+\gamma)}{2} + \frac{pbh}{2}\,(f_y - 0{,}85f'_c)\right\}$$

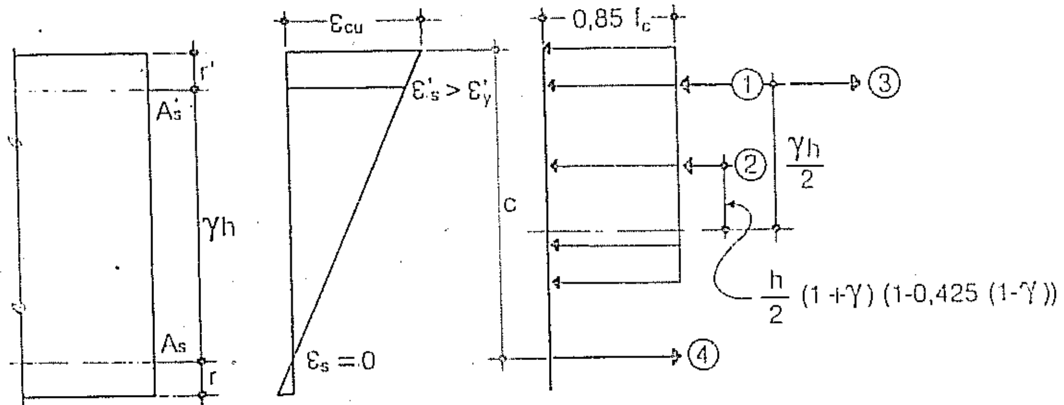
Haciendo $\Sigma M_{cp} = 0$

$$M_2 = 0{,}7\left\{0{,}7225f'_c bh^2\frac{(1+\gamma)^2}{4}(1 - 0{,}425\,(1+\gamma)) + \frac{pbh^2\gamma}{4}(f_y - 0{,}85f'_c)\right\}$$

Dividiendo P_2 por $f'_c\,bh$ y M_2 por $f'_c\,bh^2$

$$K_2 = 0{,}7\left\{0{,}7225\frac{(1+\gamma)}{2} + \frac{p}{2f'_c}(fy - 0{,}85f'_c)\right\}$$

$$\left(K\frac{e}{h}\right)_2 = 0{,}7\left\{0{,}7225\frac{(1+\gamma)^2}{2}(1 - 0{,}425\,(1+\gamma)) + \frac{p\gamma}{4f'_c}(fy - 0{,}85f'_c)\right\}$$



$$① = \frac{pbh}{2}f_y \quad ② = 0{,}7225f'_c bh\ \frac{(1+\gamma)}{2} \quad ③ = \frac{pbh}{2}0{,}85\,f'_c \quad ④ = 0$$

Figura 2.15

PUNTO 3 $(P_3 ; M_3 ; e_3)$

Para la Fig. 2.16, haciendo $\Sigma P = 0$

$$P_3 = 0{,}7\left\{0{,}7225f'_c bh\frac{(1+\gamma)}{2}\left(\frac{Es\,\xi cu}{Es\,\xi cu + fy}\right) + \frac{pbh}{2}(-0{,}85f'_c)\right\}$$

Haciendo $\Sigma Mcp = 0$

$$M_3 = 0{,}7\left\{0{,}7225\ f'_c\ bh^2\frac{(1+\gamma)}{4}\left(\frac{Es\,\xi cu}{Es\,\xi cu + fy}\right)\ x \ldots\right.$$

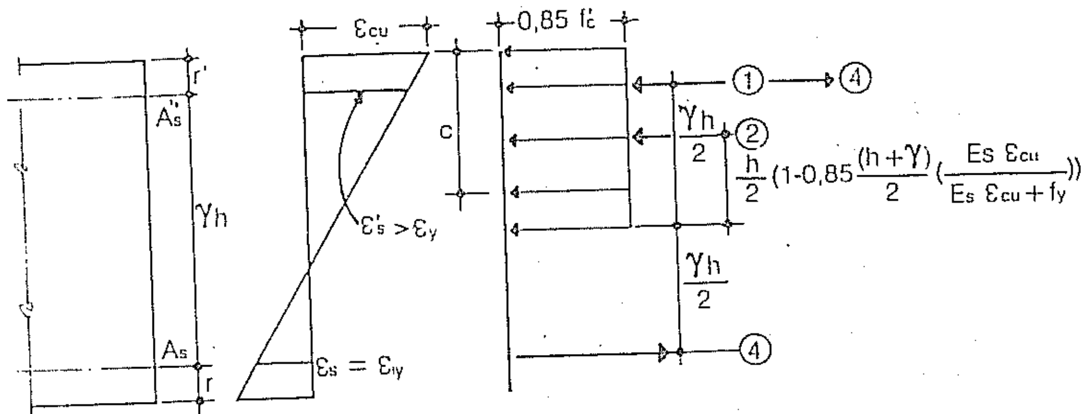
$$\left.\ldots x\left[1 - 0{,}85\frac{(1+\gamma)}{2}\left(\frac{Es\,\xi cu}{Es\,\xi cu + fy}\right)\right] + \frac{pbh^2\gamma}{4}(2fy - 0{,}85f'_c)\right\}$$

Dividiendo P_3 por $f'_c bh$ y M_3 por $f'_c bh^2$

$$K_3 = 0{,}7\left\{ 0{,}7225\frac{(1+\gamma)}{4}\left(\frac{E_s\,\xi_{cu}}{E_s\,\xi_{cu}+f_y}\right) - 0{,}425p\right\}$$

$$\left(K\frac{e}{h}\right)_3 = 0{,}7\left\{ 0{,}7225\frac{(1+\gamma)}{4}\left(\frac{E_s\,\xi_{cu}}{E_s\,\xi_{cu}+f_y}\right) x \ldots\right.$$

$$\left.\ldots x\left[1 - 0{,}85\frac{(1+\gamma)}{2}\left(\frac{E_s\,\xi_{cu}}{E_s\,\xi_{cu}+f_y}\right)\right] + \frac{p\gamma}{4f'_c}(2\,f_y - 0{,}85 f'_c)\right\}$$



① $= \frac{pbh}{2}f_y$ ② $= 0{,}7225\, f'_c\, bh\, \frac{(1+\gamma)}{2}\, \frac{E_s\,\varepsilon_{cu}}{E_s\,\varepsilon_{cu}+f_y}$ ③ $= \frac{pbh}{2}f_y$ ④ $= \frac{pbh}{2}\,0{,}85\, f'_c$

Figura 2.16

PUNTO 4 $(P_4\,;M_4\,;e_4)$

Para la Fig. 2.17, haciendo $\Sigma P = 0$

$$P_4 = 0{,}7\left\{0{,}7225\, f'_c\, bh\frac{(1-\gamma)}{2}\left(\frac{E_s\,\xi_{cu}}{E_s\,\xi_{cu}-f_y}\right) + \frac{pbh}{2}(-0{,}85 f'_c)\right\}$$

Haciendo $\Sigma M_{cp} = 0$

$$M_4 = 0{,}7\left\{0{,}7225\, f'_c\, bh^2\frac{(1-\gamma)}{4}\left(\frac{E_s\,\xi_{cu}}{E_s\,\xi_{cu}-f_y}\right) x \ldots\right.$$

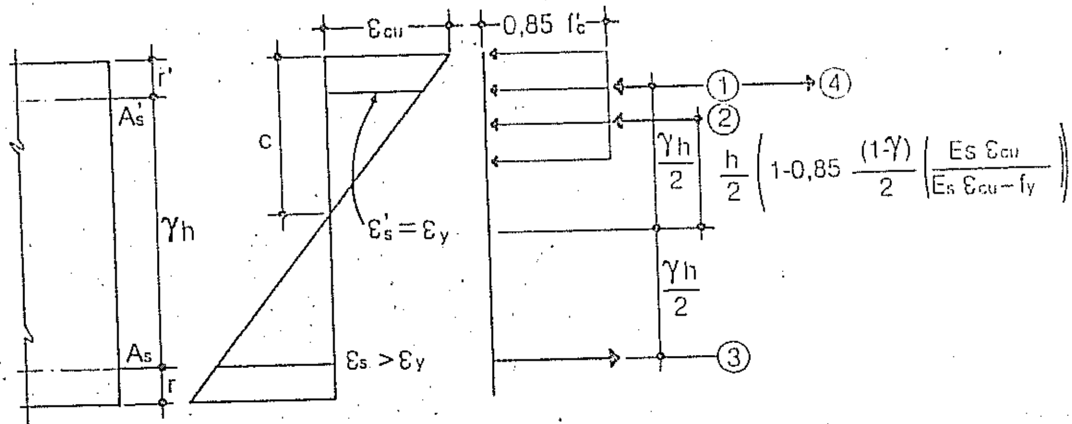
$$\left.\ldots x\left[1 - 0{,}85\frac{(1-\gamma)}{2}\left(\frac{E_s\,\xi_{cu}}{E_s\,\xi_{cu}-f_y}\right)\right] + \frac{pbh^2\gamma}{4}(2f_y - 0{,}85 f'_c)\right\}$$

Dividiendo P_4 por $f'_c bh$ y M_4 por $f'_c bh^2$

$$K_4 = 0{,}7\left\{0{,}7225\,\frac{(1-\gamma)}{2}\left(\frac{E_s\,\xi_{cu}}{E_s\,\xi_{cu}-f_y}\right)-0{,}425\,p\right\}$$

$$\left(K\frac{e}{h}\right)_4 = 0{,}7\left\{0{,}7225\,\frac{(1-\gamma)}{4}\left(\frac{E_s\,\xi_{cu}}{E_s\,\xi_{cu}-f_y}\right)\ x\ldots\right.$$

$$\left.\ldots x\left[1-0{,}85\,\frac{(1-\gamma)}{2}\left(\frac{E_s\,\xi_{cu}}{E_s\,\xi_{cu}-f_y}\right)\right]+\frac{p\,\gamma}{4f'_c}\,(2f_y-0{,}85f'_c)\right\}$$



$① = \frac{pbh}{2}f_y$ $② = 0{,}7225\,f'_c bh\,\frac{(1-\gamma)}{2}\,\frac{E_s\,\varepsilon_{cu}}{E_s\,\varepsilon_{cu}-f_y}$ $③ = \frac{pbh}{2}f_y$ $④ = \frac{pbh}{2}0{,}85\,f'_c$

Figura 2.17

PUNTO 5 (P_5 ; M_5 ; e_5)

Para la Fig. 2.18, haciendo $\Sigma P = 0$

$$P_5 = 0{,}7\left\{0{,}7225\,f'_c\,bc+\frac{pbh}{2}\left[E_s\,\xi_{cu}\left(1-h\,\frac{(1-\gamma)}{2c}\right)-0{,}85f'_c-f_y\right]\right\}=0$$

Haciendo $\Sigma M_{cp} = 0$

$$M_5 = 0{,}7\left\{0{,}7225\,f'_c\,b\,\frac{h}{2}\left(c-\frac{0{,}85\,c^2}{h}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{pbh^2\gamma}{4}\left[E_s\,\xi_{cu}\left(1-\frac{h(1-\gamma)}{2c}\right)-0{,}85\,f'_c+f_y\right]\right\}$$

Dividiendo P_5 entre $f'_c bh$ y M_5 entre $f'_c bh^2$

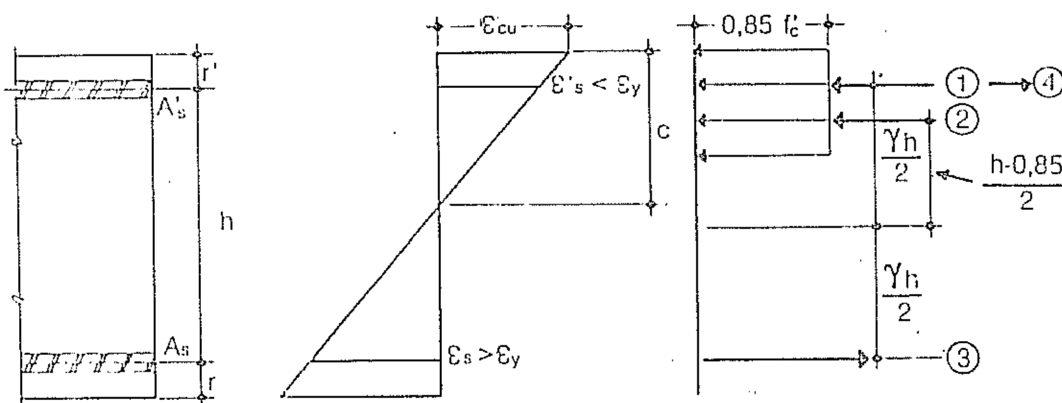
$$K_5 = 0{,}7\left\{\frac{0{,}7225\,c}{f'_c\,h} + \frac{p}{2f'_c}\left[E_s\,\xi_{cu}\left(1-\frac{h\,(1-\gamma)}{2c}\right) - 0{,}85f'_c - f_y\right]\right\}$$

$$\left(K\frac{e}{h}\right)_5 = 0{,}7\left\{\frac{0{,}36125}{h}\left(c-\frac{0{,}85\,c^2}{h}\right)+\frac{p\gamma}{4f'_c}\left[E_s\,\xi_{cu}\left(1-\frac{h\,(1-\gamma)}{2c}\right)\right] - 0{,}85f'_c + f_y\right\}$$

Estas ecuaciones se deben cumplir para la distancia del eje neutro c

$$c = \left\{(-f_y - 0{,}85f'_c + E_s\,\xi_{cu}) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \sqrt{(-f_y - 0{,}85f'_c + E_s\,\xi_{cu})^2 + \frac{2{,}89f'_c E_s\,\xi_{cu}\;(1-\gamma)}{p}}\right\}\frac{ph}{2{,}89f'_c}$$



$① = \frac{pbh}{2} E_s\,\varepsilon_{cu}\,(1-\frac{h(1-8)}{2c})$ $② = 0{,}7225\,f'_c\,bh$ $③ = \frac{pbh}{2} f_y$ $④ = \frac{pbh}{2} 0{,}85\,f'_c$

Figura 2.18

Utilizándose las ecuaciones anteriores se determinan los puntos claves 0, 1, 2, 3, 4 y 5 del diagrama de interacción, los cuales insinúan la curva, requiriendo sólo unirlos y así se tiene la forma final de la curva del diagrama de interacción.

2.9 SOFTWARE PARA REALIZAR DIAGRAMAS DE INTERACCION

A continuación se presenta un programa en BASIC, el cual se ha denominado programa DICRAE[5] (Diagrama de Interacción para Columnas Rectangulares con Acero en los Extremos), el cual permite determinar los valores de carga axial Pu y momento Mu en cuarenta y cuatro (44) puntos a lo largo de la curva del Diagrama de Interacción.

[5] Carlos A. Landa Bartolón, "Programa DICRAE", Publicado en Revista de Ingeniería Nº1, 1.983 - U.S.M

```
LISTADO DE PROGRAMA * DICRAE *
10 ! PROGRAMA  **  DICRAE  **  VERSION  ENERO 92 ING. CARLOS A. LANDA BARTOLON
20  OPTION BASE 0
30 ! DIMENSIONA VARIABLES DE CARGA AXIAL P, MOMENTO M Y DISTANCIA DEL EJE NEUTRO"
40 DIM P(90),M(90),CC(90)
50 !
60 ! INTRODUCE CARACTERISTICAS GEOMETRICAS Y MECANICAS
70 ! FY=ESFUERZO CENDENTE DEL ACERO K/cm2            FC=ESFUERZO A COMPRESION DEL CONCRETO K/CM2
80 ! R=RECUBRIMIENTO cm                              H=ALTURA DE LA SECCION cm
90 ! B=ANCHO DE LA SECCION cm                        AS=AREA DE ACERO TOTAL cm2
100 ! ES=MODULO DE ELASTICIDAD K/cm2                 ECU=DEFORMACION ULTIMA EN EL CONCRETO
110 FY=4200 @ FC=250 @ R=4 @ H=65 @ B=35 @ AS=50.7 @ ES=2100000 @ ECU=.003
120 !
130 ! CALCULA PORCENTAJE DE ACERO EN LA SECCION Y LA RELACION DE RECUBRIMIENTO
140 !
150 P=AS/H/B @ G=(H-2*R)/H
160 !
170 ! DETERMINA LOS LIMITES DE LOS ESTADOS DE TRABAJO EN FUNCION DE LA DISTANCIADEL EJE NEUTRO  C1,C2,C3,C4 Y C5
180 !
190 C1=H/.85 @ C2=H*(1+G)/2 @ C3=H*(1+G)*(ECU/(ECU+FY/ES))/2 @ C4=H*(1-G)*(ECU/(ECU-FY/ES))/2
200 AA=1.445*FC/P/H @ BB=-FY-.85*FC+ES*ECU @ DD=ES*ECU*H*(1-G)/2 @ C5=((-BB+(BB^2+4*AA*DD)^.5)/2)/AA
210 !
220 ! DETERMINA SOLICITACIONES PARA ESTADO 0
230 !
240 P(0)=.7*FC*B*H*(.85*(1-P)+P*FY/FC) @ M(0)=0 @ CC(0)=0
250 C1=H/.85 @ C2=H*(1+G)/2 @ C3=H*(1+G)*(ECU/(ECU+FY/ES))/2 @ C4=H*(1-G)*(ECU/(ECU-FY/ES))/2
260 !
270 ! DETERMINA SOLICITACIONES PARA ESTADO 1
280 !
290 C=C1+(C1-C2)/10
300 FOR J=1 TO 11 @ C=C-(C1-C2)/10 @ CC(J)=C
310 P(J)=.7*(P*B*H/2*(FY-.85*FC+ES*ECU*(1-H*(1+G)/2/C))+.7225*FC*C*B)
320 M(J)=.7*(P*B*H^2*G/4*(FY-.85*FC-ES*ECU*(1-H*(1+G)/2/C))+.36125*FC*B*H*(C-.85*C^2/H))
330 NEXT J
340 !
350 ! DETERMINA SOLICITACIONES PARA ESTADO 2
360 !
370 C=C2+(C2-C3)/10
380 FOR J=12 TO 22 @ C=C-(C2-C3)/10 @ CC(J)=C
390 P(J)=.7*(P*B*H/2*(FY-.85*FC-(ES*ECU*(-1+H*(1+G)/2/C)))+.7225*FC*C*B)
400 M(J)=.7*(P*B*H^2*G/4*(FY-.85*FC+(ES*ECU*(-1+H*(1+G)/2/C)))+.36125*FC*B*H*(C-.85*C^2/H))
410 NEXT J
420 !
430 ! DETERMINA SOLICITACIONES PARA ESTADO 3
440 !
450 C=C3+(C3-C4)/10
460 FOR J=23 TO 33 @ C=C-(C3-C4)/10 @ CC(J)=C
470 P(J)=.7*(P*B*H/2*(-(.85*FC))+.7225*FC*C*B)
480 M(J)=.7*(P*B*H^2*G/4*(2*FY-.85*FC)+.36125*FC*B*H*(C-.85*C^2/H))
490 NEXT J
500 !
510 ! DETERMINA SOLICITACIONES PARA ESTADO 4
520 !
530 C=C4+(C4-C5)/10
540 FOR J=34 TO 44 @ C=C-(C4-C5)/10 @ CC(J)=C
550 P(J)=.7*(P*B*H/2*(-FY-.85*FC+ES*ECU*(1-H*(1-G)/2/C))+.7225*FC*C*B)
560 M(J)=.7*(P*B*H^2*G/4*(FY-.85*FC+ES*ECU*(1-H*(1-G)/2/C))+.36125*FC*B*H*(C-.85*C^2/H))
570 NEXT J
580 !
```

2.10 PROBLEMA RESUELTO DE DIAGRAMA DE INTERACCION

Se desea construir el diagrama de interacción de una columna de ancho b = 35 cm. y altura h = 65 cm. , tiene 10 cabillas de Ø1" como se muestra en la figura 2.19, el concreto f'_c= 250 K/cm², el acero fy = 4.200 K/cm² y el $E_s = 2 \times 10^6$ K/cm².

10 Ø1"=>Ast =10x5,07 cm² = 50,7 cm²

$$\gamma = \frac{h - 2r}{h} = \frac{65 - 2 \times 4}{65} = 0{,}8769$$

$$p_t = \frac{Ast}{bh} \quad \frac{50{,}7}{35 \times 65} = 0{,}0223$$

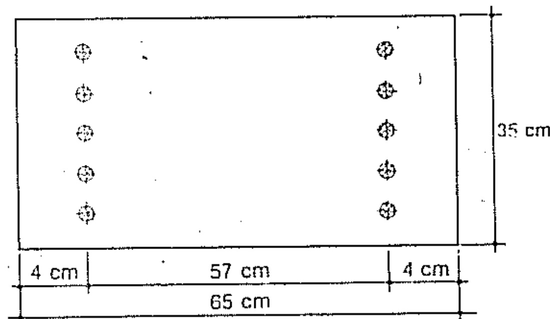


Figura 2.19

PUNTO 0

Este estado se caracteriza por tener carga axial a compresión pura y momento flector nulo por lo cual la excentricidad es nula. En la Fig. 2.20 se muestran los diagramas de deformación y esfuerzo que genera este estado.

Se cumple Pu = Po y Mu = 0 , en este caso: $\xi_s' = \xi_s = \xi_y = 0{,}002$ por lo tanto el acero a compresión y tensión se encuentran cediendo, se tiene que $f'_s = f_s = f_y$

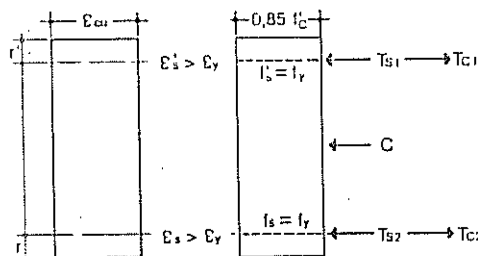


Figura 2.20

$$P_u = P_o = 0{,}7\left\{f'_c bh\left(0{,}85\,(1-p) + p\frac{f_y}{f'_c}\right)\right\}$$

$$P_u = P_o = 0{,}7\left\{250 \times 35 \times 65\left(0{,}85\,(1 - 0{,}0223) + 0{,}0223 \times \frac{4200}{250}\right)\right\} = 479.922{,}63 \text{ Kg.}$$

Este punto es sólo de utilidad para constriur la curva, ya que por normas para el diseño sólo se utiliza un 80% de ésta carga, en este caso.

$P_{máx} = 0{,}8\ P_o = 383.938{,}10$ Kg.

PUNTO 1

Ver Fig. 2.21, en este estado se cumple que $P_1 < P_o$ y $M_1 > 0$, el acero a compresión se mantiene cediendo siempre a una deformación $\xi_s' > \xi_y$, es decir cede mientras que el acero a tensión no siempre va a estar cediendo.

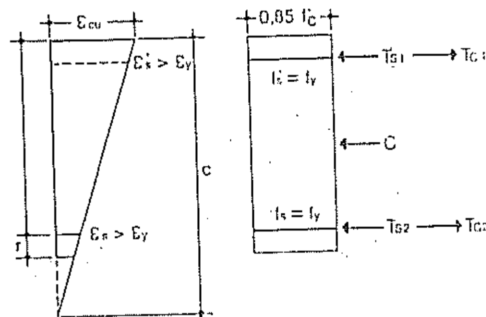


Figura 2.21

$$P_1 = 0{,}7\left\{0{,}85\, f'c\,bh + \frac{pbh}{2}\left[f_y - 0{,}85f'c + E_s\,\xi_{cu}\,(1 - 0{,}425\,(1+\gamma))\right]\right\}$$

$$P_1 = 0{,}7\left\{0{,}85 \times 250 \times 35 \times 65 + \frac{0{,}0223 \times 35 \times 65}{2} \times \ldots\right.$$

$$\left.\ldots \times\left[4.200 - 0{,}85 \times 250 + 2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003\,(1 - 0{,}425\,(1 + 0{,}8769))\right]\right\}$$

$P_1 = 431.781{,}12$ Kg.

$$M_1 = 0{,}7\left\{\frac{pbh^2\gamma}{4}\left[f_y - 0{,}85f'c - E_s\,\xi_{cu}\,(1 - 0{,}425\,(1+\gamma))\right]\right\}$$

$$M_1 = 0{,}7\left\{\frac{0{,}023 \times 35 \times 65^2 \times 0{,}8769}{4}\left[4.200 - 0{,}85 \times 250 \;-\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots - 2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003\,(1 - 0{,}425\,(1 + 0{,}8769))\right]\right\}$$

$M_1 = 1.372.032{,}82$ Kg–cm => $M_1 = 13.720{,}33$ Kg–m.

$$e_1 = \frac{M_1}{P_1} = \frac{13.720{,}33 \text{ Kg–m}}{431.781{,}12 \text{ Kg.}} = 0{,}0318 \text{ mt.}$$

PUNTO 2

Ver Fig. 2.22, en este estado el acero a tensión no cede, debido a que la deformación unitaria es cero, luego se cumple que $P_2 < P_1$ y $M_2 > M_1$ y el acero a compresión se considera siempre cediendo con $\xi_s' > \xi_y$ y $f_s' = f_y$.

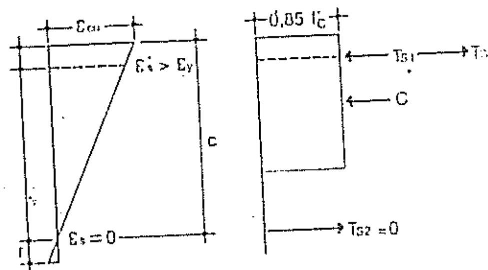


Figura 2.22

$$P_2 = 0{,}7\left\{0{,}7225\ f'_c\ bh\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) + \frac{pbh}{2}(fy - 0{,}85 f'_c)\right\}$$

$$P_2 = 0{,}7\left\{0{,}7225 \times 250 \times 35 \times 65\left(\frac{1+0{,}8769}{2}\right) + \frac{0{,}0223 \times 35 \times 65}{2}\ \ x \ldots\right.$$

$$\left.\ldots x\ (4.200 - 0{,}85\ x\ 250)\right\}$$

$P_2 = 340.702{,}25$ Kg.

$$M_2 = 0{,}7\left\{0{,}7225\ f'_c\ bh^2\frac{(1+\gamma)^2}{4}(1 - 0{,}425\ (1+\gamma)) + \frac{pbh^2\gamma}{4}(fy - 0{,}85 f'_c)\right\}$$

$$M_2 = 0{,}7\left\{0{,}7225 \times 250 \times 35 \times 65^2\frac{(1+0{,}8769)^2}{4}\ \ (1 - 0{,}425\ (1 + 0{,}8769)) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{0{,}0223 \times 35 \times 65^2 \times 0{,}8769}{4}(4.200 - 0{,}85 \times 250)\right\}$$

$M_2 = 3.791.490{,}55$ Kg–cm => $M_2 = 37.914{,}91$ Kg–m

$$e_2 = \frac{M_2}{P_2} = \frac{37.914{,}91 \text{ Kg–m}}{340.702{,}25 \text{ Kg}} = 0{,}111 \text{ mts.}$$

PUNTO 3

Ver Fig. 2.23, para este estado el acero a tensión cede con deformación cedente $\xi_s = \xi_y$, es decir, es el punto balanceado donde $P_3 = P_b < P_2$ y $M_3 = M_b > M_2$ y el acero a compresión se considera cediendo, ya que $\xi_s' > \xi_y$, entonces $f_s' = f_y$

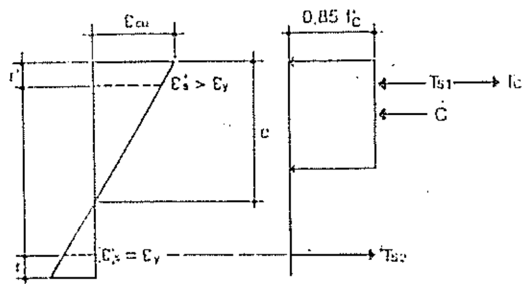


Figura 2.23

$$P_3 = 0{,}7\left\{0{,}7225\ f'_c bh\left(\frac{(1+\gamma)}{2}\right)\left(\frac{E_s\ \xi_{cu}}{E_s\ \ \xi_{cu} + fy}\right) + \frac{pbh}{2}\ (-0{,}85 f'_c)\right\}$$

$$P_3 = 0{,}7\left\{0{,}7225 \times 250 \times 35 \times 65\frac{(1+0{,}8769)}{2}\ \left(\frac{2{,}1 \times 10 \times 0{,}003}{2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003 + 4.200}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{0{,}0223 \times 35 \times 65}{2}\ (-0{,}85 \times 250)\right\}$$

$P_3 = 158.195{,}62$ Kg.

$$M_3 = 0{,}7\left\{0{,}7225\ f'c\,bh^2\left(\frac{1+\gamma}{4}\right)\left(\frac{E_s\ \xi_{cu}}{E_s\ \xi_{cu}+f_y}\right)x \ldots\right.$$

$$\left.\ldots x\left[1-0{,}85\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\right]\left(\frac{E_s\ \xi_{cu}}{E_s\ \xi_{cu}+f_y}\right)+\frac{\rho bh^2\gamma}{4}\ (2\ f_y-0{,}85f'c)\right\}$$

$$M_3 = 0{,}7\left\{0{,}7225 \times 250 \times 35 \times 65^2\,\frac{(1+0{,}8769)}{4}\left(\frac{21 \times 10^6 \times 0{,}003}{21 \times 10^6 \times 0{,}003 + 4.200}\right)x\ldots\right.$$

$$\ldots x\left[1-0{,}85\left(\frac{1+0{,}8769}{2}\right)\right]\left(\frac{2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003}{2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003 + 4.200}\right)+\ldots$$

$$\left.\ldots+\frac{0{,}0223 \times 35 \times 65^2 \times 0{,}8769}{4}\,(2 \times 4.200 - 0{,}85 \times 250)\right\}$$

$M_3 = 6.885.206{,}131$ kg–cm $\Rightarrow M_3 = 68.852{,}06$ kg–m

$$e_3 = \frac{68.852{,}06\ \text{Kg–m}}{158.195{,}62\ \text{Kg.}} = 0{,}4352\ \text{mt.}$$

PUNTO 4.

Ver Fig. 2.24, para este punto el acero a tensión tiene deformación mayor que la cedente $\xi_s > \xi_y$, se cumple $P_4 < P_b$ y $M_4 < M_b$, el acero a compresión tiene deformación unitaria igual a la cedente $\xi_s' = \xi_y$

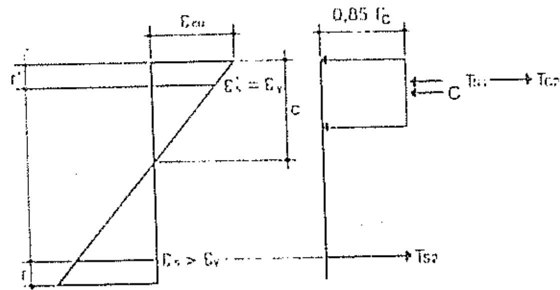


Figura 2.24

$$P_4 = 0{,}7\left\{0{,}7225\ f'c\,bh\frac{(1-\gamma)}{2}\left(\frac{E_s\ \xi_{cu}}{E_s\ \xi_{cu}-f_y}\right)+\frac{\rho bh}{2}(-0{,}85f'c)\right\}$$

$$P_4 = 0{,}7\left\{0{,}7225 \times 250 \times 35 \times 65\,\frac{(1-0{,}8769)}{2}\left(\frac{2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003}{2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003 - 4.200}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{0{,}0223 \times 35 \times 65}{2}(-0{,}85 \times 250)\right\}$$

$P_4 = 49.332{,}94$ Kg.

$$M_4 = 0{,}7\left\{0{,}7225\ f'_c\ bh^2\,\frac{(1-\gamma)}{4}\left(\frac{E_s\ \xi_{cu}}{E_s\ \xi_{cu} - f_y}\right)x\ldots\right.$$

$$\left.\ldots x\left[1 - 0{,}85\ \frac{(1-\gamma)}{2}\left(\frac{E_s\ \xi_{cu}}{E_s\ \xi_{cu} - f_y}\right)\right] + \frac{\rho bh^2}{4}(2\ f_y - 0{,}85 f'_c)\right\}$$

$$M_4 = 0{,}7\left\{0{,}7225 x 250 x 35 x 65^2\,\frac{(1 - 0{,}8769)}{4}\left(\frac{2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003}{2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003 - 4.200}\right)x\ldots\right.$$

$$\ldots x\left[1 - 0{,}85\ \frac{(1 - 0{,}8769)}{2}\left(\frac{2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003}{2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003 - 4.200}\right)\right] + \ldots$$

$$\left.\ldots + \frac{0{,}0223 \times 35 \times 65^2}{4}(2 \times 4.200 - 0{,}85 \times 250)\right\}$$

M_4 = 5.574.622,34 Kg–cm.=>M_4= 55.746,22 Kg–m.

$$e_4 = \frac{55.746{,}22\ \text{Kg–m.}}{49.332{,}94\ \text{Kg.}} = 1{,}13\text{mt.}$$

PUNTO 5

Ver Fig. 2.25, en este punto el acero a tensión continúa cediendo, se cumple que $P_5 = 0$ y $M_5 < M_b$, el acero a compresión cede con deformación unitaria $\xi_s' < \xi_y$, entonces $f'_s < f_y$.

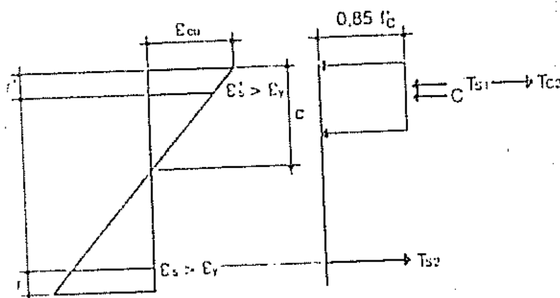


Figura 2.25

$$P_5 = 0{,}7\left\{0{,}7225\ f'_c\ bc + \frac{\rho bh}{2}\left[E_s\ \xi_{cu}\left(1 - \frac{h\ (1-\gamma)}{2\ c}\right) + 0{,}85\ f'_c - f_y\right]\right\}$$

$$M_5 = 0{,}7\left\{0{,}7225\ f'_c\ b\,\frac{h}{2}\left(c - \frac{0{,}85\ c^2}{h}\right) + \frac{\rho bh^2\gamma}{4}\left[E_s\ \xi_{cu}\left(1 - \frac{h\ (1-\gamma)}{2\ c}\right) - \ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots - 0{,}85 f'_c + f_y\right]\right\}$$

El valor de c viene dado por la siguiente expresión:

$$c = \left\{ -(-f_y - 0{,}85f'c + E_s\,\xi_{cu}) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \sqrt{(-f_y - 0{,}85f'c + E_s\,\xi_{cu})^2 + \frac{2{,}89f'c E_s\,\xi_{cu}\,(1-\gamma)}{p}} \right\} \frac{ph}{2{,}89f'c}$$

Haciendo $P_5 = 0$ y sustituyendo el valor de c sería:

$$c = \left\{ -(-4.200 - 0{,}85 \times 250 + 2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003) + \ldots \right.$$

$$\ldots + \left[(-4.200 - 0{,}85 \times 250 + 2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003)^2 + \ldots \right.$$

$$\left. \left. \ldots + \frac{2{,}89 \times 250 \times 2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003\,(1 - 0{,}8769)}{0{,}0223} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \frac{0{,}0223 \times 65}{2{,}89 \times 250}$$

c= 6,9567 cm.

$$M_5 = 0{,}7 \left\{ 0{,}7225 \times 250 \times \frac{35 \times 65}{2} \left(6{,}9567 - \frac{0{,}85 \times 6{,}9567^2}{65} \right) + \ldots \right.$$

$$\ldots + \frac{0{,}0223 \times 35 \times 65^2 \times 0{,}8769}{4} \left[2{,}1 \times 10^6 \times 0{,}003 \times \ldots \right.$$

$$\left. \left. \ldots \times \left(1 - \frac{65\,(1 - 0{,}8769)}{2 \times 6{,}9567} \right) - 0{,}85 \times 250 + 4.200 \right] \right\}$$

M_5 = 4.280.274,52 Kg–cm $\quad$ M_5 = 42.802,75 Kg–m

$$e_5 = \frac{M_5}{P_5} = \frac{42.802{,}75 \text{ Kg–m}}{0} = \infty$$

En la Fig. 2.26 se muestra el diagrama de interacción resultante de la columna.

Hasta el momento han sido analizadas las columnas del tipo rectangular con acero simétrico repartido en cargas opuestas y con flexión uni-axial, es decir con momentos flectores en una sola dirección, para las columnas circulares o con acero uniformemente repartido en todas las caras se puede decir que el procedimiento es exactamente el mismo sólo que en razón de

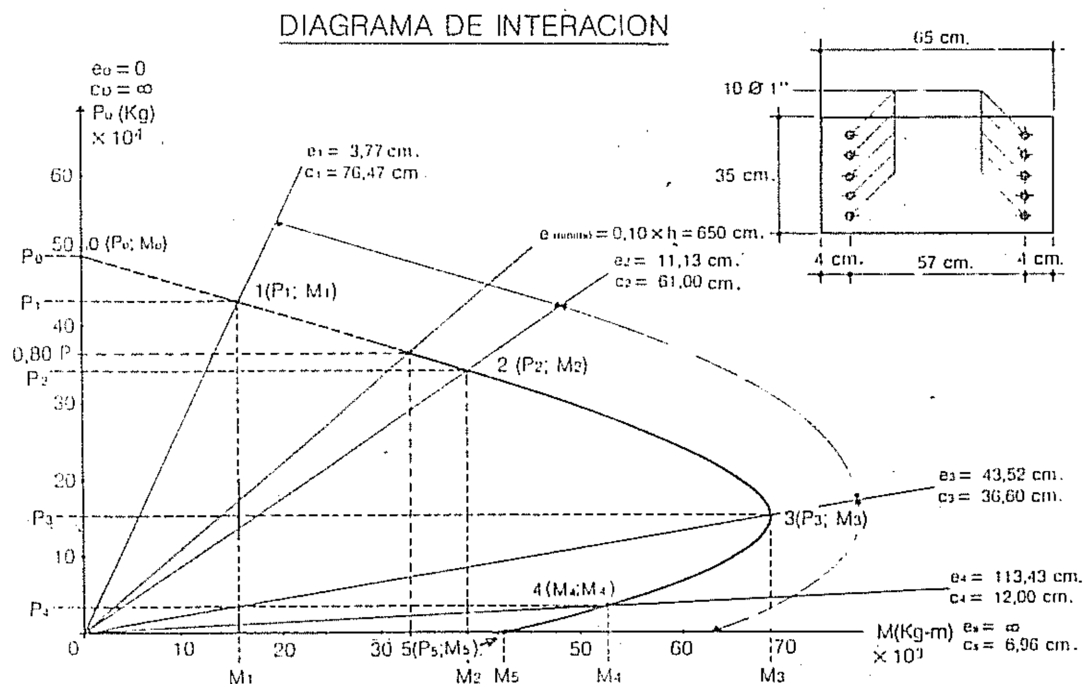


Figura 2.26

la dificultad de las fórmulas resultantes no se aplican éstas para resolución analítica, algunos proyectistas asimilan para el diseño como rectangulares a las columnas circulares o de formas distintas, estando entonces del lado de la seguridad desde el punto de vista de resistencia, aunque no desde el punto de vista de comportamiento estructural, ya que se pueden cometer errores en cuanto a las rigideces de cálculo por lo tanto errores en los resultados.

A continuación se hace una comparación gráfica de las distintas formas de los diagramas de interacción que se originan cuando la geometría y el tipo de columnas varían, sean éstas zunchadas o ligadas, ver Fig. 2.27.

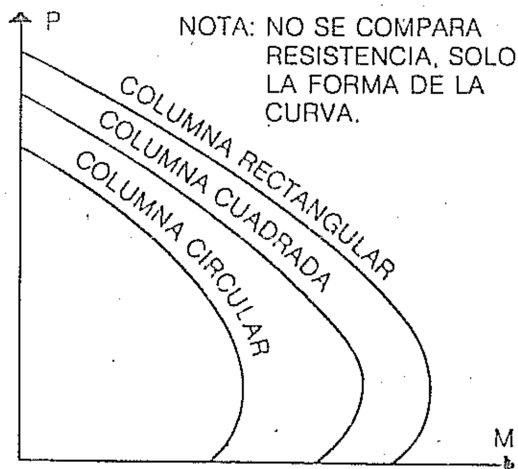


Figura 2.27

2.11 PROBLEMAS RESUELTOS

2.11.1 EJERCICIO Nº1

Diseñar una columna de sección rectangular del tipo ligada que resiste las siguientes cargas y materiales

$P_D = 72$ T. $\quad P_L = 14$ T.

$M_D = 20$ T–m $\quad M_L = 9$ T–m,

$f'_c = 210$ K/cm² $\quad f_y = 4.200$ K/cm²

CARGAS DE DISEÑO

$P_u = 1{,}4\,P_D + 1{,}7\,P_L = 1{,}4 \times 72 + 1{,}7 \times 14 = 124{,}6$ T.

$M_u = 1{,}4\,M_D + 1{,}7\,M_L = 1{,}4 \times 20 + 1{,}7 \times 9 = 43{,}3$ T–m.

PREDIMENSIONADO

Se asume, en este caso como no hay más datos y que es una columna esquinera.

$$A_c = \frac{P_u}{0{,}35 f'_c} = \frac{124.600}{0{,}35 \times 210} = 1.695 \text{ cm}^2$$

Se toma de 35 x 50 cm.

Tomando recubrimiento r = 3 cm. $\quad \gamma = \dfrac{h - 2r}{h} = \dfrac{50 - 2 \times 3}{50} = 0{,}88 \approx 0{,}9$

a) DISEÑO POR DIAGRAMAS DE INTERACCION

$$K = \frac{P_u}{f'_c\, bh} = \frac{124.600}{210 \times 35 \times 50} = 0{,}339$$

$$\frac{e}{h} = \frac{M_u}{P_u}\,\frac{1}{h} = \frac{43{,}3}{124{,}6} \times \frac{1}{0{,}50} = 0{,}695$$

$$K\frac{e}{h} = 0{,}339 \times 0{,}695 = 0{,}236$$

Entrando a Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas; pág. 42 con los siguientes parámetros:

$f'_c = 210$ K/cm² $\quad f_y = 4.200$ K/cm² $\quad \gamma = 0{,}9$

$K = 0{,}339$ $\quad K\,e/h = 0{,}236$

Se obtiene el porcentaje de acero total requerido $p_t = 0{,}028$

$$\text{Por lo tanto } A_s = A'_s = \frac{p_t\, bh}{2} = \frac{0{,}028 \times 35 \times 50}{2} = 24{,}5 \text{ cm}^2$$

Usar 5 Ø1" en cada cara.

b) DISEÑO ANALITICO

$$\text{Se determina} \quad P_b = \varnothing\left\{0{,}85^2 f'_c \left(\frac{6.300}{6.300 + f_y}\right)\frac{(1 + \gamma)}{2}\right\} bh$$

$$P_b = 0{,}70\left\{0{,}85^2 \times 210\left(\frac{6.300}{6.300 + 4.200}\right)\frac{(1 + 0{,}9)}{2}\right\} 35 \times 50 = 105.942 \text{ Kg.}$$

Como $P_u = 124{,}6$ T. $> P_b = 103{,}86$ T, la falla es del tipo a compresión y como $\gamma = 0{,}88 > 0{,}672$ el $A's$ estará cediendo, entonces..

$$A_s = A's = \left(\frac{P_u}{\varnothing} - \frac{f'c\,bh}{\frac{12}{(1+\gamma)^2}\frac{e}{h} + 1{,}18}\right)\left(\frac{\frac{e}{\gamma h} + 0{,}5}{f_y}\right)$$

$$A_s = A's = \left(\frac{124.600}{0{,}70} - \frac{210 \times 35 \times 50}{\frac{12}{(1+0{,}88)^2} \times 0{,}695 + 1{,}18}\right)\left(\frac{\frac{0{,}695}{0{,}88} + 0{,}5}{4.200}\right) = 22{,}78 \text{ cm}^2$$

Usar 5 Ø1" en cada cara.
Como se vé los resultados son coincidentes al procedimiento anterior.

2.11.2 EJERCICIO Nº 2

Para las cargas de diseño $P_u = 160$ T. y $M_u = 52$ T–m determinar el área de acero requerido para una columna de b=50 cm. y h=60 cm., concreto $f'c = 210$ K/cm², $f_y = 4.200$ K/cm² y el recubrimiento r = 3 cm.

Se determina $\gamma = \frac{h - 2r}{h} = \frac{60 - 2 \times 3}{60} = 0{,}9$

a) POR DIAGRAMAS DE INTERACCION

$$K = \frac{P_u}{f'c\,bh} = \frac{16.0000}{210 \times 50 \times 60} = 0{,}254$$

$$\frac{e}{h} = \frac{M_u}{P_u}\frac{1}{h} = \frac{52}{160} \times \frac{1}{0{,}60} = 0{,}542$$

$$K\frac{e}{h} = 0{,}254 \times 0{,}542 = 0{,}138$$

Utilizando Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas, pág. 42, con los siguientes parámetros:

$f'c = 210$ K/cm² $\quad f_y = 4.200$ K/cm² $\quad \gamma = 0{,}9$

$K = 0{,}254 \quad K\,e/h = 0{,}138$

Se obtiene el porcentaje de acero total requerido $p_t = 0{,}01$

Por lo tanto $A_s = A'_s = \frac{p_t bh}{2} = \frac{0,010 \times 50 \times 60}{2} = 15,0 \text{ cm}^2$

Usar 4 Ø 7/8" en cada cara.

b) DISEÑO ANALITICO

Se determina $P_b = \varnothing \left\{ 0,85^2 f'c \left(\frac{6.300}{6.300 + f_y} \right) \frac{(1+\gamma)}{2} \right\} bh$

$$P_b = 0,70 \left\{ 0,85^2 \times 210 \left(\frac{6.300}{6.300 + 4.200} \right) \frac{(1+0,9)}{2} \right\} \times 50 \times 60 = 181.615 \text{ Kg.}$$

Como $P_u = 160$ T. < $P_b = 181,6$ T, la falla es del tipo a tensión y se debe chequear el factor Ø

CHEQUEO DEL FACTOR DE INEFICACIA Ø

$\varnothing P_n = 0,1 f'c bh = 0,1 \times 210 \times 50 \times 60 = 63.000$ Kg $\Rightarrow P_u = 160$ T. > $\varnothing P_n = 63$ T.

En este caso se usa Ø = 0,70

Se determina la relación $\frac{e}{h} = \frac{M_u}{P_u} \frac{1}{h} = \frac{52}{160} \times \frac{1}{0,60} = 0,542$

$$A_s = A'_s = \left(\frac{P_u}{\varnothing\, 0,85\, f'c bh} + 2\frac{e}{h} - 1 \right) \frac{P_u}{2\, \varnothing\, f_y\, \gamma}$$

El acero requerido

$$A_s = A'_s = \left(\frac{160.000}{0,70 \times 0,85 \times 210 \times 50 \times 60} + 2 \times 0,542 - 1 \right) \times \ldots$$

$$\ldots \times \frac{160.000}{2 \times 0,70 \times 4.200 \times 0,90} = 15,44 \text{ cm}^2$$

Usar 4 Ø7/8" en cada cara.

El inconveniente de este método es que no segura que el acero a compresión A'_s cede.

c) DISEÑO ANALITICO (Variante)

Para asegurar la cedencia del acero a compresión A'_s se debe cumplir que $a \geq 1.275\,(1 - \gamma)$

Por lo tanto $a \geq 1,275\,(1 - 0,9)\,60 = 7,65$ cm. $\Rightarrow a \geq 7,65$ cm.

Determinación de "a"

Despejando de $P_u = 0,85 f'c ab$

$$a = \frac{P_u}{\varnothing 0,85 f'c b} = \frac{160.000}{0,70 \times 0,85 \times 4.200 \times 0,90} = 25,6 \text{ cm.} > 7,65 \text{ cm.}$$

Por lo tanto el acero a compresión A_s' está cediendo

$$A_s = A_s' = \left(\frac{Mu}{Ø} - 0{,}85f'c\,\frac{ab}{2}\,(h - a)\right)\frac{1}{fy\,\gamma\,h}$$

$$A_s = A_s' = \left(\frac{5.200.000}{0{,}70} - 0{,}85 \times 210 \times 25{,}6 \times 50 \times \frac{1}{2}\,(60 - 25{,}6)\right)x \ldots$$

$$\ldots x\,\frac{1}{4.200 \times 0{,}9 \times 60} = 15{,}43\ cm^2$$

Usar 4 Ø 7/8" en cada cara.

Con este método se tiene la certeza de conocer si el acero a compresión A_s' cede, en caso que el acero a compresión A_s' no estuviera cediendo, el resultado por cualquier método es muy aproximado a la verdad y algo por encima, es decir, cualquier método se puede usar y es confiable su resultado.

2.11.3 EJERCICIO Nº 3

Se tiene una columna con las cargas P_u = 280 T. y M_u = 12 T–m, el concreto $f'c$ = 210 K/cm^2 y acero fy = 4.200 K/cm^2 se desea conocer su geometría y el área de acero necesaria, para resistir las solicitaciones dadas.

PREDIMENSIONADO.

Como la relación de momento a carga o excentricidad es muy pequeña, se determina la excentricidad e.

$$e = \frac{M_u}{P_u} = \frac{12\ T\text{–}m}{280\ T.} = 0{,}043\ m.$$

Se considera que es una columna del tipo interna, por lo tanto;

$$A_c = \frac{P_u}{0{,}6\ f'c} = \frac{280.000}{0{,}6 \times 210} = 2.222\ cm^2 \Rightarrow \text{Se toma cuadrada } 45 \times 45$$

Chequeo con la excentricidad mínima para la máxima carga axial
e = 4,3 cm. < e = 0,1 h = 0,1 x 45 = 4,5 cm.
En este caso se limita la capacidad de carga

$$P_{máx} = 0{,}80\left[Ø\ (0{,}85f'c\,bh + A_{st}\,fy)\right]$$

Por lo tanto se puede determinar el area de acero total A_{st} requerido

$$A_{st} = \left(\frac{P_{máx}}{0{,}80\ Ø} - 0{,}85f'c\ bh\right)\frac{1}{f_y}$$

$$A_{st} = \left(\frac{280.000}{0{,}80 \times 0{,}70} - 0{,}85 \times 210 \times 45 \times 45\right)\frac{1}{4.200} = 32{,}99\ cm^2$$

Se determina el porcentaje de acero total

$$p_t = \frac{A_{st}}{bh} = \frac{32{,}99}{45 \times 45} = 0{,}0163 > p_{mín} = 0{,}01$$

Por lo tanto, usar 4 Ø 1" en cada cara.

2.11.4 EJERCICIO Nº 4

Se pide determinar si una columna rectangular de b=40 cm. y h=60 cm. con 5 Ø1" en cada cara, con concreto f'_c = 250 K/cm², con acero fy = 4.200 K/cm² y recubrimiento r = 3 cm. resiste las siguientes combinaciones de cargas:

1.– Pu = 250 T. y Mu = 45 T–m

2.– Pu = 150 T. y Mu = 70 T–m .

Con recubrimiento 3 cm. => $\gamma = \frac{h - 2r}{h} = \frac{60 - 2 \times 3}{60} = 0{,}9$

Determinación del porcentaje de acero p_t

$$p_t = \frac{A_{st}}{bh} = \frac{10 \times 5{,}07}{40 \times 60} = 0{,}0211$$

1.– Para la combinación Pu= 250 T. y Mu = 45 T–m.

a) POR DIAGRAMAS DE INTERACCION

$$K = \frac{P_u}{f'_c\, bh} = \frac{250.000}{250 \times 40 \times 60} = 0{,}417$$

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas, pág. 45, con los parámetros siguientes:

f'_c = 280 K/cm² fy = 4.200 K/cm² $\gamma = 0{,}9$

K = 0,417 p_t =0,0211

Se obtiene el valor de K e/h = 0,152

Luego, $M_u = K\frac{e}{h}\, f'_c bh^2 = 0{,}152 \times 250 \times 40 \times 60 \times 0{,}60 = 54.720$ K–m > 45 T –m

En consecuencia la columna resiste las solicitaciones dadas.

b) POR FORMULAS ANALITICAS

Se determina la carga balanceada P_b

$$P_b = 0{,}7\left\{0{,}85^2 f'_c \left(\frac{6.300}{6.300 + f_y}\right)\frac{(1 + \gamma)}{2}\right\} bh$$

$$P_b = 0{,}7\left\{0{,}85^2 \times 250\left(\frac{6.300}{6.300 + 4.200}\right)\frac{(1 + 0{,}9)}{2}\right\} 40 \times 60 = 172.966 \text{ Kg.}$$

$P_u = 250$ T. > 169,6 T., la falla es del tipo a compresión

De la expresión $A_s = A'_s = \left(\dfrac{P_u}{\varnothing} - \dfrac{f'_c bh}{\dfrac{12}{(1+\gamma)^2}\dfrac{e}{h} + 1{,}18}\right)\left(\dfrac{\dfrac{e}{\gamma h} + 0{,}5}{f_y}\right)$

Como $\dfrac{e}{h} = 0{,}30$, $A_s = A'_s = 5 \times 5{,}07 \text{ cm}^2 = 25{,}35 \text{ cm}^2$ y $\gamma = 0{,}9$

Se despeja $P_u = 282{,}34$ T. > 250 T., en consecuencia la columna resiste las soluciones dadas.

2.– Para la combinación $P_u = 150$ T. y $M_u = 70$ T–m

a) POR DIAGRAMAS DE INTERACCION

$$K = \frac{P_u}{f'_c bh} = \frac{150.000}{250 \times 40 \times 60} = 0{,}25$$

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas, pág. 45, con los parámetros siguientes:

$f'_c = 250$ K/cm² $\quad f_y = 4.200$ K/cm² $\quad \gamma = 0{,}9$

$K = 0{,}25 \quad p_t = 0{,}0105$

Se obtiene el valor de $K\,e/h = 0{,}18$

Luego, $M_u = K\dfrac{e}{h}\, f'_c bh^2 = 0{,}18 \times 250 \times 40 \times 60 \times 0{,}60 = 64.800$ Kg–m < 70 T–m

En consecuencia la columna no resiste las solicitaciones dadas.

b) POR FORMULAS ANALITICAS

$P_b = 172{,}96$ T. => $P_u = 150$ T. < $P_b = 169{,}6$ T. por lo tanto la falla es del tipo a tensión.

De la expresión:

$$A_s = A'_s = \left[\frac{M_u}{\varnothing} - 0{,}85\, f'_c \frac{ab}{2}(h - a)\right]\left(\frac{1}{f_y \gamma h}\right)$$

Se despeja el valor M_u para los siguientes parámetros, $A_s = A'_s$, γ y a

$A_s = A'_s = 5 \times 5{,}07 \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2 \qquad \gamma = 0{,}9$

$$a = \frac{Pu}{\text{Ø } 0{,}85\ f'cb} = \frac{150.000}{0{,}70 \times 0{,}85 \times 250 \times 40} = 25{,}21 \text{ cm.}$$

Como a = 25,21 cm. > 1,275 (1 – γ)h = 1,275 (1 – 0,9) 60 = 7,65 cm., el acero a compresión A's se encuentra cediendo.

Despejando Mu se obtiene Mu = 66,33 T–m < 70 T–m
En consecuencia la columna no resiste las solicitaciones dadas.

2.11.5 EJERCICIO Nº 5.

Determinar el área de acero necesaria para resisitir las solicitaciones Pu = 250 T. y Mu = 25 T–m, para concreto f'c = 210 K/cm² y acero fy = 4.200 K/cm², se desea diseñar una columna circular.

Se toma recubrimiento tal que γ = 0,8
Predimensionado

$$Ac = \frac{P_u}{0{,}5 f'c} = \frac{250.000}{0{,}50 \times 210} = 23{,}80 \text{ cm}^2$$

$$Ac = \frac{\pi D^2}{4} = 23{,}80 \text{ cm}^2 \Rightarrow D = 50 \text{ cm.}$$

Trabajando con las tablas de columnas rectangulares con acero distribuido y considerando una reacción cuadrada equivalente en área.

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = h^2 \Rightarrow h = \frac{D}{2}\sqrt{\pi} = \frac{50}{2}\sqrt{\pi} = 44{,}31 \text{ cm.}$$

$$K = \frac{Pu}{f'ch^2} = \frac{250.000}{210 \times 44{,}31^2} = 0{,}606$$

$$\frac{e}{h} = \frac{M_u}{P_u}\,\frac{1}{h} = \frac{25}{250} \times \frac{1}{0{,}4431} = 0{,}2256$$

$$K\frac{e}{h} = 0{,}006 \times 0{,}2256 = 0{,}1367$$

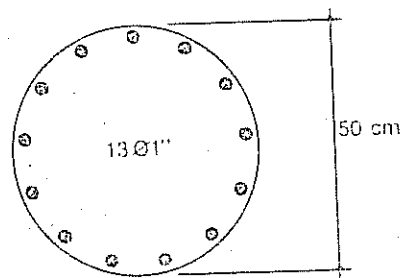


Figura 2.28

Entrando a Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas, pág. 59, con los siguientes parámetros:

f'c = 210 K/cm² fy = 4.200 K/cm² γ = 0,8
K = 0,606 K e/h = 0,1367

Se obtiene el porcentaje total de acero total requerido en la sección $p_t = 0{,}034$

Luego el área de acero total, $A_{st} = \frac{p_t\,\pi D^2}{4} = \frac{0{,}034 \times \pi \times 50^2}{4} = 62{,}83 \text{ cm}^2$

Por lo tanto, usar 13 Ø1" repartidos uniformemente, ver Fig. 2.28.

CAPITULO III
Flexo-Compresión Biaxial

3.1 INTRODUCCION

Cuando una sección es solicitada simultáneamente por carga axial y momentos en dos direcciones alrededor de sus dos ejes principales, se dice que existe flexo-compresión esviada o biaxial.

Estos tipos de solicitaciones se generan en todas las columnas de cualquier estructura que se conciba fuera de un plano, en la Fig. 3.1 la columna 2B se encuentra cargada por la viga V2X en la dirección X y la viga VBY en la dirección Y, la simplificación estructural de la columna es la indicada en la Fig. 3.2, en la cual se muestra que el

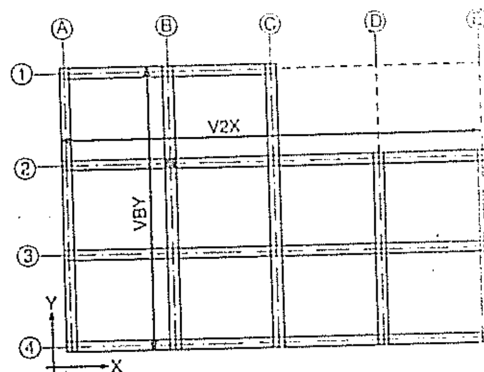
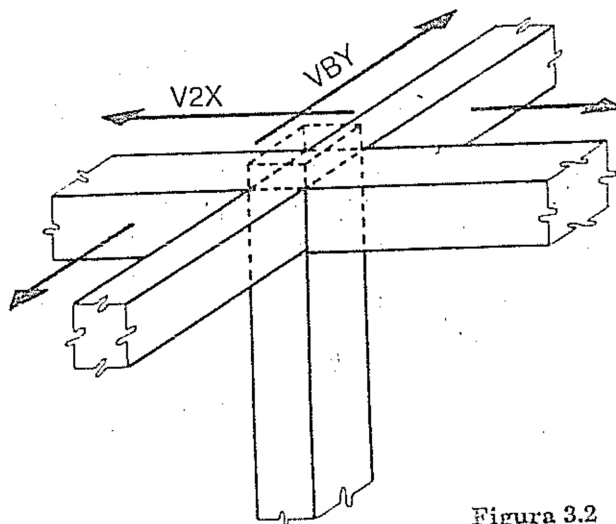


Figura 3.1



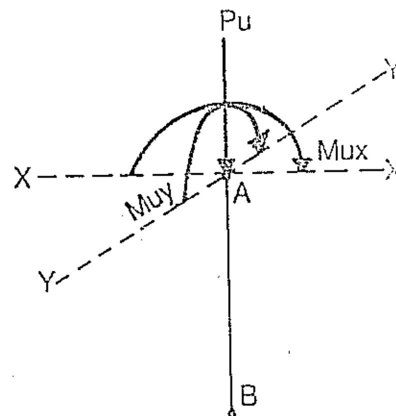


Figura 3.2

nodo A de la columna está cargado con la carga axial Pu y los momentos Mux y Muy simultáneamente.

Si se extrae una sección cualquiera de la columna, tal como se dijo, ésta estará solicitada por una carga axial y dos momentos actuantes, en la Fig. 3.3 se puede observar lo dicho anteriormente, donde se ve una carga axial Pu aplicada a la columna la cual es excéntrica respecto a los dos ejes principales X e Y, es decir e_x y e_y producen momentos Mux y Muy respectivamente.

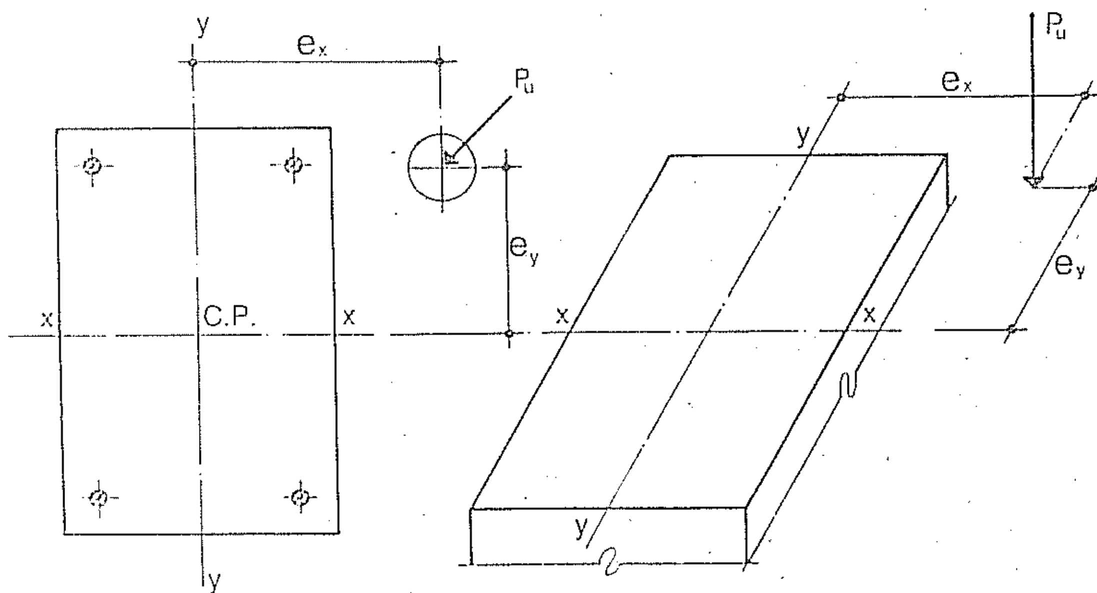


Figura 3.3

3.2 CONTORNOS DE INTERACCION

Para ilustrar la flexión biaxial, en la Fig. 3.4 se ve la superficie de falla de la columna en la cual cada punto representa unos momentos Mux y Muy que actúan junto a una carga axial a compresión Pu, los cuales se pueden ver si se toma un plano horizontal que pase por Pu además este plano define una curva llamada "Contorno de Interacción", indicada en la Fig. 3.4, la cual muestra el contorno de interacción para la carga axial a compresión Pu, la forma de esta curva será función de la geometría de la columna, de los materiales que la componen, de la cantidad de área de acero y la ubicación de éstos en la columna, es decir del recubrimiento y por supuesto del nivel de carga axial que se tiene.

Como se vé, son multiples las variables que integran la superficie de interacción de una columna , por lo tanto no se podría proporcionar la

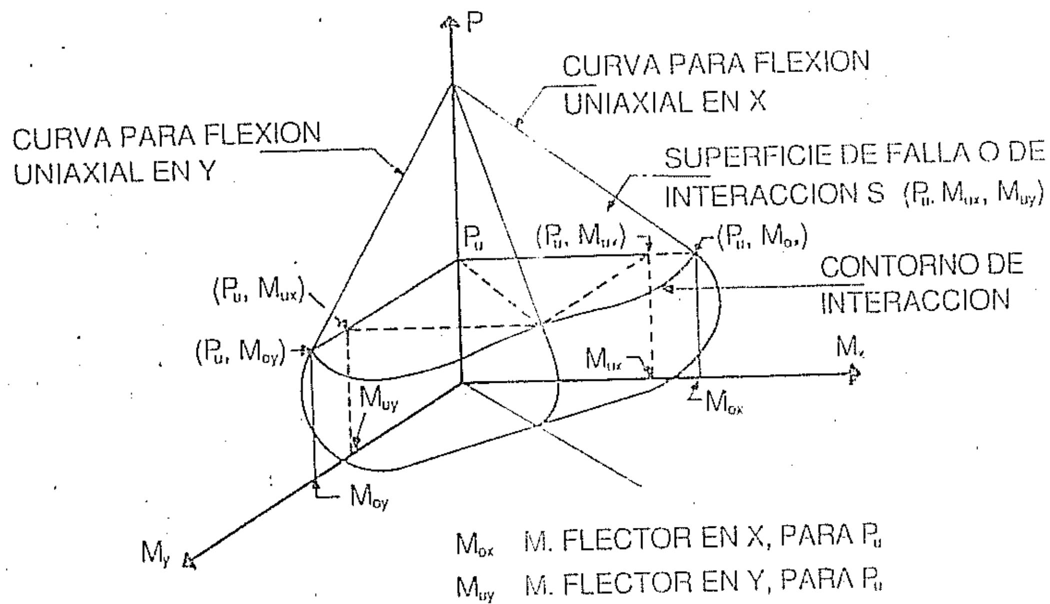


Figura 3.4

superficie de interacción que abarque todos los casos posibles de carga axial. Si se trabaja con una curva "S" función de $f(1/Pu;X;Y)$ como la indicada en la Fig. 3.5 resultante de la combinación de los valores $1/Pu$ y de las excentricidades e_x y e_y, luego, si en esa superficie se pasa un plano "P" definido por tres puntos A, B y C de coordenadas indicadas en la Fig. 3.6.

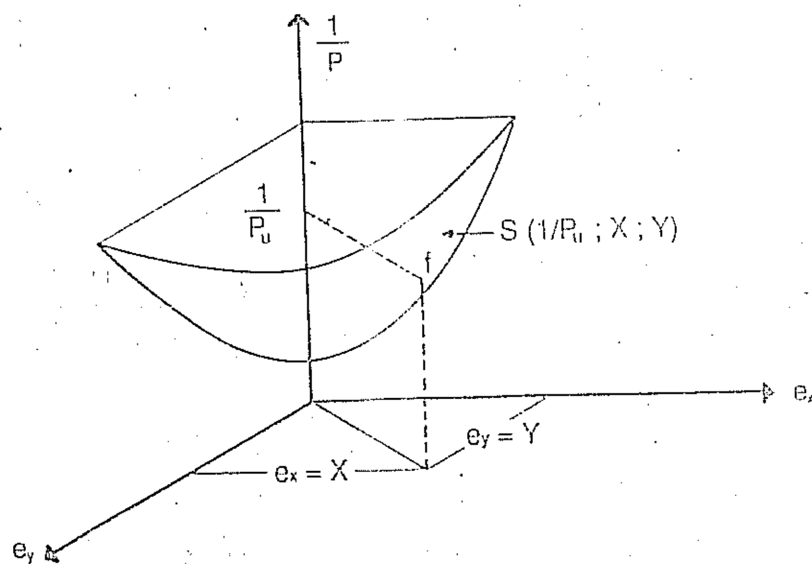


Figura 3.5

$A\left(\frac{1}{P_{ox}}; X_A ; 0\right)$ => Flexo-compresión uni-axial respecto a eje X

$B\left(\frac{1}{P_{oy}}; 0; Y_B\right)$ => Flexo-compresión uni-axial respecto a eje Y

$C\left(\frac{1}{P_o}; 0; 0\right)$ => Carga axial pura a compresión

P_o = Carga axial a compresión última con $e = 0$
P_{ox} = Carga axial a compresión última con $e = X_A$
P_{oy} = Carga axial a compresión última con $e = Y_B$
La intersección del plano "P" con la curva "S" vease en la Fig. 3.7.

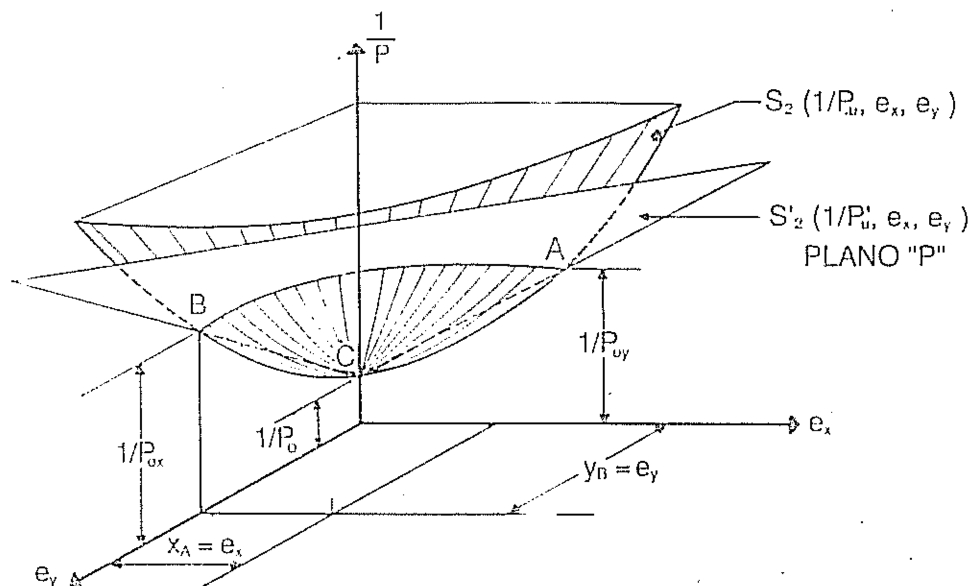


Figura 3.6

La ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C es la siguiente:

$$\left[(X - X_A) + \frac{X_A}{Y_B} Y\right] + \left[\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_B}\right]\left[(X - X_A) + \frac{X_A}{Z_B - Z_A}(Z_i - Z_A)\right] = 0$$

sustituyendo X por X_A e Y por Y_B, se tiene:

$$X_A + \left[\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_B}\right]\left[\frac{X_A}{Z_B - Z_A}(Z_i - Z_A)\right] = 0 \qquad \text{luego:}$$

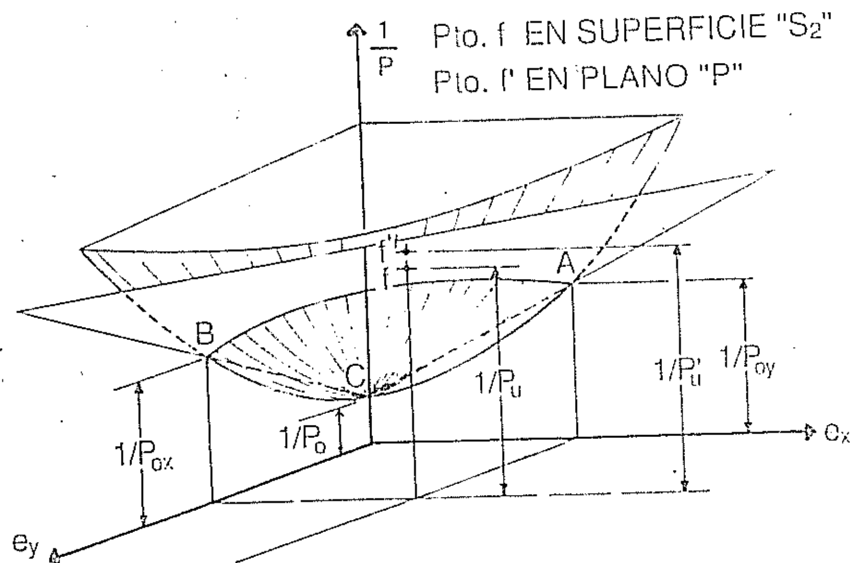


Figura 3.7

$$1 + \frac{Z_i - Z_A}{Z_C - Z_B} = 0 \Rightarrow Z = Z_A + Z_B - Z_C$$

como $Z_i = \dfrac{1}{P_u}$ $\quad Z_A = \dfrac{1}{P_{oy}}$ $\quad Z_B = \dfrac{1}{P_{ox}}$ $\quad$ y $\quad Z_C = \dfrac{1}{P_o}$

Sustituyendo se obtiene la ecuación llamada 1a. Ecuación de Bresler.

3.3 1a. ECUACION DE BRESLER[1]

Al sustituir los valores anteriores se obtiene la llamada 1a. Ecuación de Bresler:

$$\frac{1}{P_u} = \frac{1}{P_{ox}} + \frac{1}{P_{oy}} - \frac{1}{P_o} \quad \text{ó} \quad 1 = \frac{P_u}{P_{ox}} + \frac{P_u}{P_{oy}} - \frac{P_u}{P_o}$$

Esta ecuación se aconseja utilizarla sólo cuando $P_u > 0{,}1f'_cA_g$ pudiendo trabajarse también en forma adimensional multiplicando y dividiendo por el factor $f'_c bh$, donde:

$K_u = \dfrac{P_u}{f'_c bh}$ $\quad K_x = \dfrac{P_{ox}}{f'_c bh}$ $\quad K_y = \dfrac{P_{oy}}{f'_c bh}$ $\quad$ y $\quad K_o = \dfrac{P_o}{f'_c bh}$

(1) Bresler, Boris, "Desing Criteria for Reinforced Concrete Columns Under Axial Load and Biaxial Bending", ACI Journal, Proceeding V. 57, Nov. 1.960

Luego, sustituyendo los valores anteriores en la 1a. Ecuación de Bresler se tiene el llamado Factor de Bresler "F.B."

$$F.B. = \frac{K_u}{K_x} + \frac{K_u}{K_y} - \frac{K_u}{K_o}$$

Si el F.B. > 1 el diseño no es bueno se recomienda, aumentar acero de la sección.

Si el F.B. < 1 el diseño es antieconómico, las secciones grandes.

Lo ideal será mantener el F.B. = 1.

También propuso Bresler una familia de curvas de contornos de interacción correspondientes a valores constantes de P_u, expresión que se ha llamado 2da. Ecuación de Bresler.

3.4 2da. ECUACION DE BRESLER

Boris Bresler [1] presenta también otra ecuación, llamada 2da. Ecuación de Bresler.

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{ox}}\right)^{\alpha} + \left(\frac{M_{uy}}{M_{oy}}\right)^{\beta} = 1$$

Se aconseja utilizarla sólo cuando $P_u < 0{,}1f'_cA_g$, los coeficientes α y β dependen de la geometría de la sección, de la cantidad de acero y su distribución, de los materiales y su comportamiento, forma y cantidad de las ligaduras. Posteriormente se propuso unas modificaciones a la 2da. Ecuación de Bresler.

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{ox}}\right)^{\frac{\log 0{,}5}{\log \beta}} + \left(\frac{M_{uy}}{M_{oy}}\right)^{\frac{\log 0{,}5}{\log \beta}} = 1$$

Donde β es un parámetro que iguala las ordenadas de las curvas de los contornos de interacción en el punto donde la relación entre los momentos sean iguales, es decir:

$$\left(\frac{M_{uy}}{M_{ox}}\right) = \left(\frac{M_{ux}}{M_{ox}}\right)$$

Para valores de $\beta=0{,}5$ (límite inferior) la ecuación anterior describe una línea recta que une las relaciones de momentos iguales a 1, para valores $\beta = 1$ (límite superior) describe dos líneas cada una de los cuales es paralela a uno de los ejes de coordenadas y para valores intermedios $0{,}5 \leq \beta \leq 1$ se pretende determinar el perfil de las curvas de los contornos de interacción.

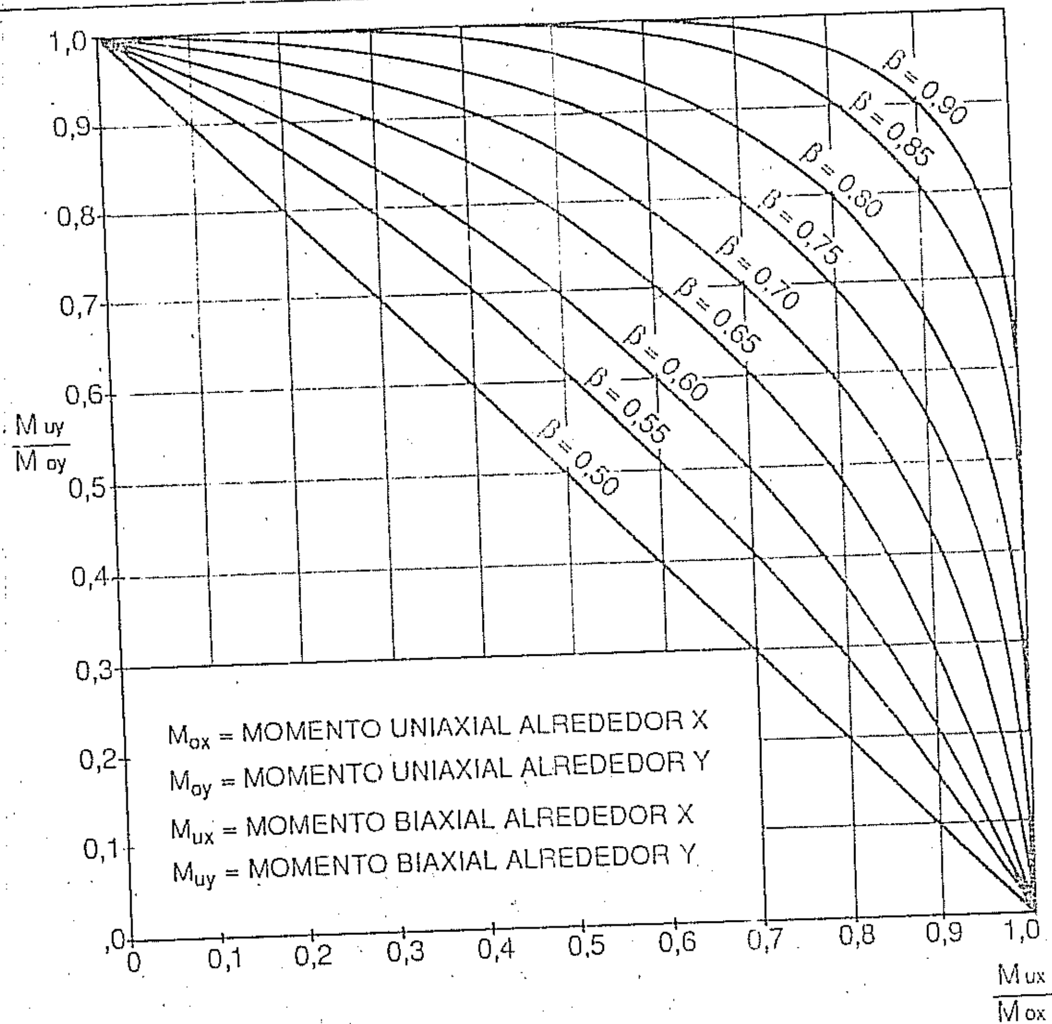


Figura 3.8

A continuación se muestra un gráfico donde se representan éstas curvas para distintos valores de ß y de la relación de momentos, ver Fig. 3.8.

Es decir, conocido el valor de ß para una columna con las características tales que se puedan determinar los valores de M_{ox} y M_{oy} ya que los valores de momentos actuantes M_{ux} y M_{uy} siendo estos $M_{ux} = P_u e_y$ y $M_{uy} = P_u e_x$, por las siguientes expresiones:

$$M_{oy} \approx M_{uy} + M_{ux}\left(\frac{b}{h}\right)\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$$

$$M_{ox} \approx M_{ux} + M_{uy}\left(\frac{h}{b}\right)\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$$

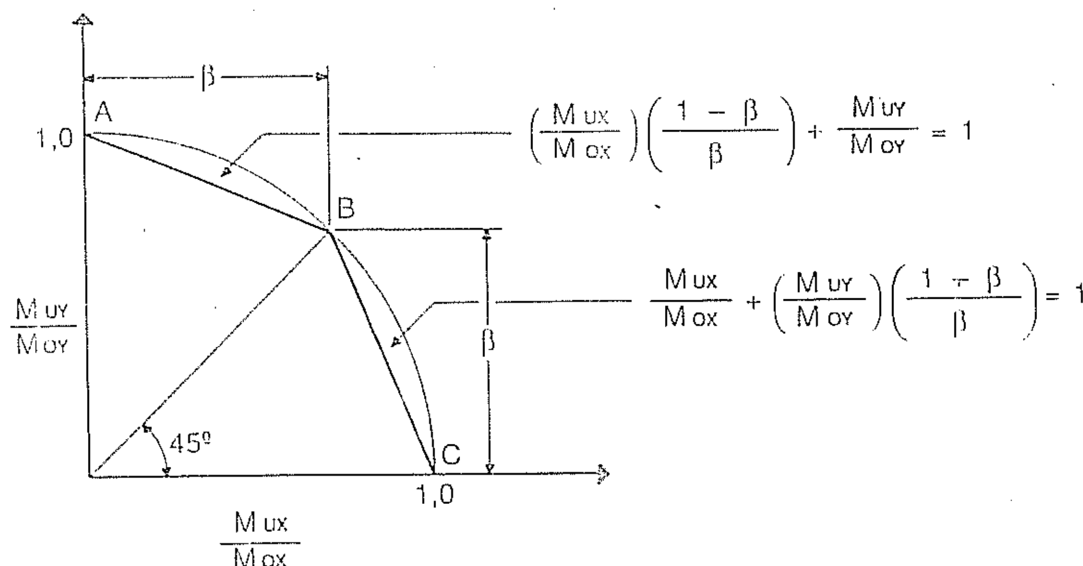


Figura 3.9

Estas ecuaciones provienen de reemplazar la curva del contorno de interacción para una carga constante Pu por dos líneas rectas como se vé en la Fig. 3.9.

Como ya se conocen los puntos A, B y C se pueden reemplazar en forma muy aproximada a dos líneas rectas AB y BC, para obtener las siguientes relaciones:

TRAMO AB

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{ox}}\right)\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)+\frac{M_{uy}}{M_{oy}}=1$$ =>Dividiendo y multiplicando por Moy, se tiene:

$$M_{oy} = M_{ux}\left(\frac{M_{oy}}{M_{ox}}\right)\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)+M_{uy}$$

Para secciones rectangulares con acero distribuido uniformemente en todas sus caras, es posible relacionar la ecuación con la geometría b y h de la columna y así obtener el valor de Moy.

$$M_{oy} \approx M_{uy} + M_{ux}\left(\frac{b}{h}\right)\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$$

TRAMO BC

$$\left(\frac{Mux}{Mox}\right)+\left(\frac{Muy}{Moy}\right)\left(\frac{1-ß}{ß}\right)=1$$ => Dividiendo y multiplicando por Mox, se tiene:

$$Mox = Mux + Muy\left(\frac{Mox}{Moy}\right)\left(\frac{1-ß}{ß}\right)$$

Para secciones rectangulares con acero distribuido uniformemente en todas sus caras, es posible relacionar la ecuación con la geometría b y h de la columna y así obtener el valor de Mox.

$$Mox \approx Mux + Muy\left(\frac{h}{b}\right)\left(\frac{1-ß}{ß}\right)$$

Conocidos los valores de Mox y Moy se diseña con las Tablas y Gráficas de Diagramas de Interacción Adimensionales a flexo-compresión uni-axial del Autor.

A continuación se dan valores en tablas para la determinación del coeficiente ß, para relaciones de goemetría tales que $0{,}25 \le h/b \le 4$ y concreto de $f'c \le 280$ K/cm² y valores de $0.7 \le \gamma \le 1$.

TABLAS DEL COEFICIENTE ß PARA FLEXO COMPRESION BIAXIAL

Para concretos de $f'c \le 280$ K/cm^2 y aceros de fy = 4200 K/cm^2

$$\frac{1}{4} \le \frac{h}{b} \le 4 \qquad 0{,}7 \le \gamma \le 1$$

PARA 4 CABILLAS

Pt (%)	Pu/Po									
	.00	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
1,0	.88	.71	.63	.61	.60	.62	.65	.67	.69	.72
1,5	.85	.67	.61	.59	.59	.62	.64	.66	.68	.70
2,0	.79	.64	.59	.57	.59	.61	.63	.65	.67	.69
2,5	.75	.62	.58	.56	.59	.61	.63	.65	.67	.68
3,0	.72	.61	.56	.55	.58	.61	.63	.65	.66	.68
4,0	.68	.58	.55	.56	.58	.60	.62	.64	.66	.68
5,0	.65	.57	.54	.56	.58	.60	.62	.64	.66	.68
6,0	.63	.55	.53	.56	.58	.60	.61	.63	.66	.78

PARA 6 CABILLAS

ρ_t (%)	Pu/Po									
	.00	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
1,0	.80	.69	.65	.62	.61	.63	.66	.68	.70	.74
1,5	.75	.65	.62	.60	.60	.63	.65	.67	.70	.73
2,0	.72	.63	.61	.59	.60	.63	.65	.67	.69	.72
2,5	.69	.63	.60	.58	.60	.62	.64	.66	.69	.70
3,0	.67	.62	.59	.57	.60	.62	.64	.66	.69	.70
4,0	.64	.60	.57	.57	.60	.62	.64	.66	.68	.68
5,0	.63	.59	.57	.57	.60	.62	.64	.66	.68	.68
6,0	.62	.58	.56	.57	.60	.62	.63	.66	.68	.68

PARA 8 CABILLAS

ρ_t (%)	Pu/Po									
	.00	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
1,0	.77	.67	.65	.63	.62	.64	.66	.68	.72	.75
1,5	.74	.65	.63	.62	.61	.64	.66	.68	.71	.73
2,0	.69	.63	.62	.60	.61	.63	.66	.68	.71	.72
2,5	.66	.62	.61	.59	.61	.63	.66	.68	.71	.71
3,0	.64	.62	.60	.59	.61	.63	.66	.68	.71	.70
4,0	.62	.61	.59	.58	.61	.63	.65	.68	.70	.66
5,0	.61	.60	.58	.58	.61	.63	.65	.68	.70	.66
6,0	.60	.59	.57	.58	.61	.63	.65	.68	.69	.66

PARA 10 CABILLAS

ρ_t (%)	Pu/Po									
	.00	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
1,0	.78	.69	.65	.63	.62	.64	.66	.68	.70	.73
1,5	.74	.66	.63	.62	.61	.63	.65	.67	.69	.71
2,0	.72	.65	.62	.60	.61	.63	.65	.66	.68	.70
2,5	.70	.63	.60	.59	.61	.63	.65	.66	.67	.68
3,0	.68	.63	.60	.59	.61	.63	.64	.65	.67	.68
4,0	.65	.61	.59	.58	.61	.62	.64	.65	.66	.68
5,0	.64	.60	.58	.58	.61	.62	.64	.65	.66	.69
6,0	.63	.58	.57	.58	.60	.62	.63	.64	.65	.70

PARA 12 CABILLAS

p_t (%)	Pu/Po .00	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
1,0	.75	.63	.65	.64	.63	.64	.[illegible]6	.68	.70	.73
1,5	.72	.66	.64	.62	.62	.64	.66	.68	.70	.70
2,0	.68	.65	.62	.61	.61	.64	.66	.67	.69	.69
2,5	.66	.64	.62	.60	.61	.64	.[illegible]6	.67	.68	.69
3,0	.65	.63	.61	.60	.61	.64	.[illegible]5	.67	.67	.60
4,0	.64	.61	.60	.59	.61	.64	.[illegible]5	.66	.67	.67
5,0	.63	.61	.60	.59	.61	.64	.[illegible]5	.66	.66	.67
6,0	.62	.60	.59	.59	.62	.63	.65	.65	.65	.68

Las tablas anteriores se presentan también en forma de curvas, las cuales se pueden ver en la Fig. 3.10.(a), (b) y (c)

3.5 METODO SIMPLIFICADO DE GOUWENS

Otro método de obtener el valor de ß, es el método simplificado que publicó el Ing. Albert Gouwens(2) basado en las curvas que el profesor Parme(3) y Asociados publicaron, el método se basa en las curvas de la Fig. 3.10.

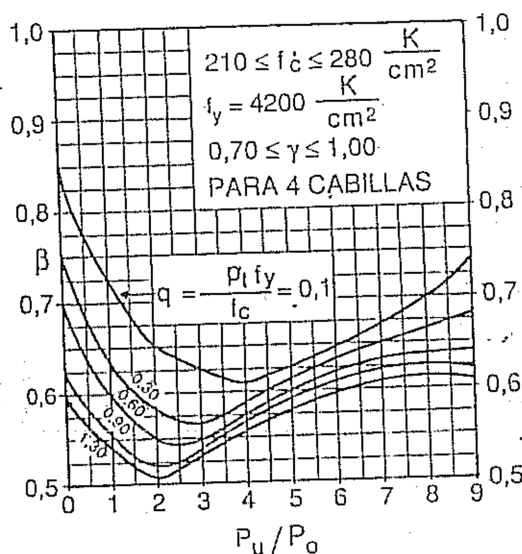


Figura 3.10 (a)

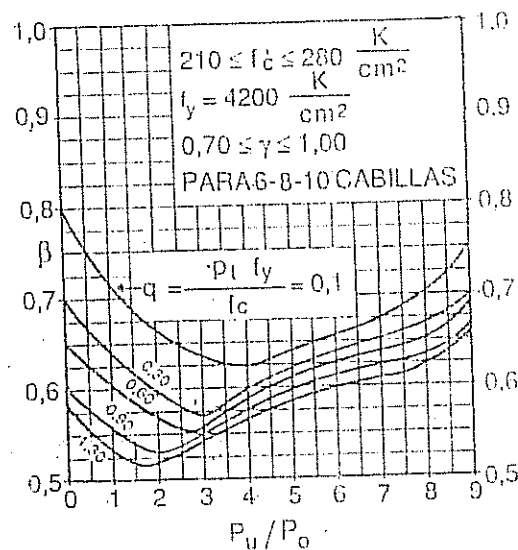


Figura 3.10 (b)

(2) Ing. Albert Gouwens, "Biaxial Bending Simplified", Publication SP-50-10 Reinforced Concrete Columns ACI 1.975

(3) Parne Alfred, Nieves José and Gouwens Albert, "Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending", ACI Journal. Sep. 1.966

En un estudio realizado con un gran número de columnas se obtuvo que el mínimo valor de β_{min} ocurre muy cerca del valor de carga P=0,25f'c bh para cualquier tipo de columnas y sea cual fuere los rangos de f'c, fy, b, h y γ.
Para las cargas menores de P<0,25f'c bh el valor de ß "aumenta" y para cargas mayores de P>0,25f'c bh también el valor de ß "aumenta", se muestra la variación general de ß en la Fig. 3.11, donde se observa que ß se aproxima a 1 para valores de P = P_o, por lo tanto, se propone la siguiente expresión:

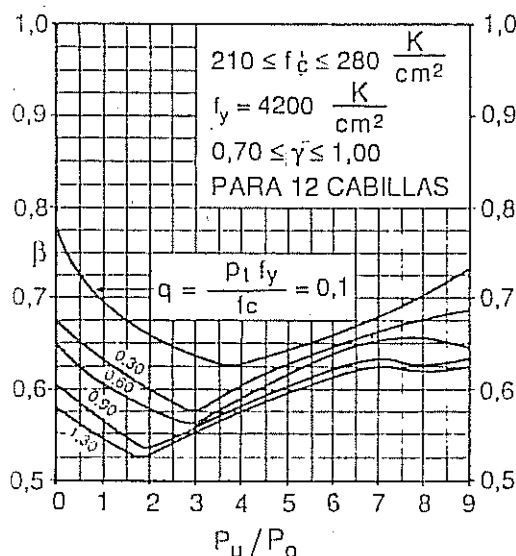


Figura 3.10(c)

Para $P_u > 0,25\ f'_c bh$

$$\beta = \beta_{min} + 0,2\,\frac{\dfrac{P_u}{f'_c bh} - 0,25}{0,85 + \dfrac{A_{st} f_y}{f'_c bh}}$$

Para $P_u < 0,25\ f'_c bh$

$$\beta = \beta_{min} + \left(0,25 - \frac{P_u}{f'_c bh}\right)^2 \left(0,85 - \frac{A_{st} f_y}{2\,f'_c bh}\right)$$

Donde el valor de β_{min} se define así:

$$\text{Si } \frac{A_{st} f_y}{f'_c bh} > 0,5 \Rightarrow \beta_{min} = 0,485 + 0,03\left(\frac{A_{st} f_y}{f'_c bh}\right)$$

$$\text{Si } \frac{A_{st} f_y}{f'_c bh} < 0,5 \Rightarrow \beta_{min} = 0,545 + 0,35\left(0,5 - \frac{A_{st} f_y}{f'_c bh}\right)^2$$

Lo anterior se puede expresar en las curvas que a continuación se exponen en la Fig. 3.12.

Es interesante observar que los resultados por este método obtenido siempre generan soluciones por el lado de la seguridad y en algunos casos podría resultar columnas con mucho más acero que con los otros métodos, sin embargo, es útil el método porque no requiere de tablas sino la aplicación de unas fórmulas.

En conclusión, la flexo-compresión se resume en un análisis que se realiza para cada eje por separado previa consideración de ciertos parámetros.

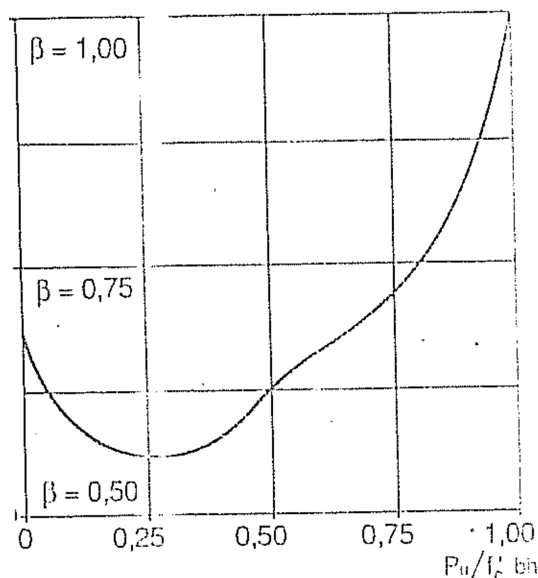


Figura 3.11

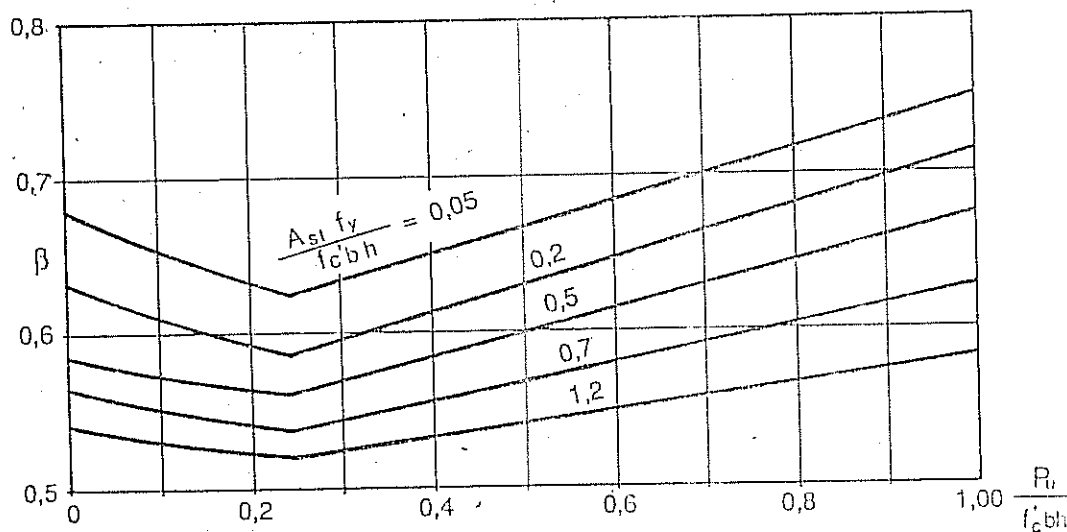


Figura 3.12

3.6 METODOS DE CALCULO PARA FLEXO-COMPRESION BIAXIAL

Se han implementado muchos métodos basados unos en suposiciones y otros sobre bases más teóricas, pero en realidad ninguno es exacto ya que la dificultad de las ecuaciones resultantes lo hacen imprácticos debido a los parámetros que se involucran.

3.6.1 METODO DE SUPERPOSICION

Es el método más inseguro ya que sólo considera la flexión respecto a cada eje independiente una de otra, la solución se da al sumar el área de acero resultante por cada lado.

Comentario: Este método puede producir grandes cantidades de áreas de acero.

3.6.2 METODO DE LA EXCENTRICIDAD EQUIVALENTE

El método se basa en la 1a. Ecuación de Bresler, utilizando la expresión de excentricidades equivalente.

$$\frac{e}{h} = \sqrt{\left(\frac{e}{h}\right)_x^2 + \left(\frac{e}{h}\right)_y^2} \qquad \text{Donde,} \quad \left(\frac{e}{h}\right)_x = \frac{M_{ux}}{P_u\ h} \quad y \quad \left(\frac{e}{h}\right)_y = \frac{M_{uy}}{P_u\ b}$$

Para luego entrar a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, con los parámetros:

$$K_u = \frac{P_u}{f'c\, b h}\left(\frac{e}{h}\right) \quad y \quad \frac{e}{h}$$

Y así obtener el porcentaje de acero p_t requerido, luego se comprueba el Factor de Bresler "F.B.", con los valores K_x, K_y y K_o de los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, ya que se tienen las excentricidades respectivas y el porcentaje de acero calculado.

Luego:

Se obtiene K_x con la relación $(e/h)_x$ y p_t

Se obtiene K_y con la relación $(e/h)_y$ y p_t

Se obtiene K_o con la relación $(e/h)_o = 0$

Se chequea el Factor de Bresler $F.B. = \frac{K_u}{K_x} + \frac{K_u}{K_y} - \frac{K_u}{K_o}$

Si F.B. es > 1 la sección estará mal diseñada.
Si F.B. es < 1 la sección es antieconómica.

Comentario: Este método es muy conservador, por lo tanto genera grandes áreas de acero.

3.6.3 METODO ANALITICO DE LA EXCENTRICIDAD EQUIVALENTE

Se basa también en la 1a. Ecuación de Bresler utilizando la expresión de excentricidad equivalente siguiente:

$$\frac{e}{h} = \sqrt{\left(\frac{e}{h}\right)_x^2 + \left(\frac{e}{h}\right)_y^2} \qquad \text{Donde,} \quad \left(\frac{e}{h}\right)_x = \frac{Mux}{Pu\ h} \quad y \quad \left(\frac{e}{h}\right)_y = \frac{Muy}{Pu\ b}$$

Se comprueba si la sección de la columna trabaja a tensión o a compresión, para lo cual es necesario determinar la magnitud del P_b y compararla con la carga axial actuante P_u.

Donde la expresión de P_b se puede tomar como:

$$P_b = \varnothing\left[0{,}85^2\ f'c\left(\frac{6.300}{6.300 + fy}\right)\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\right]bh \qquad \textit{(Expresión simplificada)}$$

$$\text{Si } P_u > P_b \Rightarrow A_s = A'_s = \left[\frac{P_u}{\varnothing} - \frac{f'c\,bh}{\frac{12}{(1+\gamma)^2}\frac{e}{h} + 1{,}18}\right]\left(\frac{\frac{e}{\gamma h} + 0{,}5}{fy}\right)$$

$$\text{Si } P_u < P_b \Rightarrow A_s = A'_s = \frac{P_u}{2\varnothing\ fy\ \gamma}\left[\frac{2e}{h} - 1 + \frac{P_u}{\varnothing\ 0{,}85\ f'c\,bh}\right]$$

Entonces se tiene:

Para la cara X donde $\gamma = \gamma_x = \dfrac{h - 2r}{h} \Rightarrow A_{sx} = A'_{sx}$

Para la cara Y donde $\gamma = \gamma_y = \dfrac{b - 2r}{b} \Rightarrow A_{sy} = A'_{sx}$

Conocida el área de acero se puede obtener el porcentaje de acero p_t.
Luego:
Se obtiene K_x con la relación $(e/h)_x$ y p_t
Se obtiene K_y con la relación $(e/h)_y$ y p_t
Se obtiene K_o con la relación $(e/h)_o = 0$

Se chequea el Factor de Bresler $F.B. = \dfrac{K_u}{K_x} + \dfrac{K_u}{K_y} - \dfrac{K_u}{K_o}$

Si F.B. es > 1 la sección estará mal diseñada.
Si F.B. es < 1 la sección es antieconómica.
Comentario: Este método es muy conservador y resultan áreas de acero bastante grandes.

3.6.4 METODO BASADO EN LA 2da. ECUACION DE BRESLER

Se basa en la 2da. Ecuación de Bresler, que asume el contorno de la superficie de interacción como bi-lineal, donde se debe cumplir lo siguiente, si la sección es rectangular:

PARA TRAMO AB

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{ox}}\right)\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)+\frac{M_{uy}}{M_{oy}}=1 \qquad \text{Si} \quad \frac{M_{uy}}{M_{oy}}>\frac{M_{ux}}{M_{ox}}$$

PARA TRAMO BC

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{ox}}\right)+\frac{M_{uy}}{M_{oy}}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)=1 \qquad \text{Si} \quad \frac{M_{uy}}{M_{oy}}<\frac{M_{ux}}{M_{ox}}$$

Como no se conocen los valores de M_{ox} y M_{oy} , éstos se determinan de acuerdo a la relación de dimensiones b y h de la sección, según lo siguiente:

$$\frac{M_{oy}}{M_{ox}}\approx\frac{b}{h}=\text{Cte.}\frac{b}{h} \qquad \text{y} \qquad \frac{M_{ox}}{M_{oy}}\approx\frac{h}{b}=\frac{1}{\text{Cte.}}\,\frac{h}{b}$$

Donde Cte es un número racional cercano a 1, por lo tanto asumiendo por ejemplo Cte.= 0,90 será posible saber si se cumple:

PARA TRAMO AB

$$\text{Si} \quad \frac{M_{uy}}{M_{oy}}<\frac{M_{ux}}{M_{ox}} \quad \Rightarrow \quad M_{oy}\approx M_{uy}+M_{ux}\frac{b}{h}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$$

El valor de β se obtiene por cualquiera de los dos métodos comentados.

El valor de Moy se convierte en adimensional $\left(K\frac{e}{b}\right)_{oy}$.

$$\left(K\frac{e}{b}\right)_{oy}=\frac{M_{oy}}{f'_c\,hb^2}$$

Entrando en los Diagramas de Interación Adimensionales del Autor con:

$$\left.\begin{array}{l} K_u = \dfrac{P_u}{f'_c\ hb} \\ \left(K\dfrac{e}{b}\right)_{oy} = \dfrac{M_{oy}}{f'_c\ hb^2} \\ \gamma_y = \dfrac{b-2r_y}{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se obtiene } p_t$$

PARA TRAMO BC

$$\text{Si } \frac{M_{uy}}{M_{oy}} > \frac{M_{ux}}{M_{ox}} \Rightarrow M_{ox} \approx M_{ux} + M_{uy}\frac{h}{b}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$$

El valor de β se obtiene por cualquiera de los métodos comentados.

El valor de M_{ox} se convierte en adimensional $\left(K\frac{e}{h}\right)_{ox}$

$$\left(K\frac{e}{h}\right)_{ox} = \frac{M_{ox}}{f'_c\ bh^2}$$

Entrando en los Diagramas de Interacción Adimensionales de Autor con:

$$\left.\begin{array}{l} K_u = \dfrac{P_u}{f'_c\, b\, h} \\ \left(K\dfrac{e}{h}\right)_{ox} = \dfrac{M_{ox}}{f'_c\ bh^2} \\ \gamma_x = \dfrac{h-2r_x}{h} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se obtiene } p_t$$

Conocido el valor de p_t se procede a obtener el área de acero respectiva.

Comentario: Este método se considera el más exacto y recomendado para el diseño.

3.7 PROBLEMAS DE FLEXO-COMPRESION BI-AXIAL

3.7.1 EJERCICIO Nº 1

Diseñar la columna rectangular con concreto $f'c = 210$ K/cm², acero $fy = 4200$ K/cm² con recubrimiento 5 cm., determinar el área de acero si se sabe que está solicitada por las siguientes cargas.

$P_v = 160$ T. $\quad M_{vx} = 5$ T-m $\quad M_{sx} = 6$ T-m

$P_{sx} = 35$ T. $\quad M_{vy} = 5$ T-m $\quad M_{sy} = 10$ T-m

$P_{sy} = 50$ T.

NOTA: P_v, M_{vx} y M_{vy} significan cargas verticales ya mayoradas

SELECCION DE CARGAS (VER CAPITULO VI)

Caso de Carga I

$P_u = 160$ T.

$M_{ux} = 5$ T-m

$M_{uy} = 5$ T-m

Caso de Carga II

$P_u = 0{,}75\,(160 + 1{,}87 \times 35) = 169$ T.

$M_{ux} = 0{,}75\,(5 + 1{,}87 \times 6) = 12$ T-m

$M_{uy} = 0{,}75 \times 5 = 3{,}75$ T-m

Caso de Carga III

$P_u = 0{,}75\,(160 + 1{,}87 \times 50) = 190$ T.

$M_{ux} = 0{,}75 \times 6 = 4{,}5$ T-m

$M_{uy} = 0{,}75\,(5 + 1{,}87 \times 10) = 17{,}8$ T-m

Predimensionado

$$A_c = \frac{P_u}{0{,}5\,f'c} = \frac{190.000}{0{,}5 \times 210} = 1.810\ \text{cm}^2 \Rightarrow 35 \times 55\ \text{cms.}$$

a) DISEÑO POR METODO DE EXCENTRICIDAD EQUIVALENTE

Para Caso de Carga I

$$\left(\frac{e}{h}\right)_x = \frac{M_{ux}}{P_u}\,\frac{1}{h} = \frac{5}{160} \times \frac{1}{0{,}55} = 0{,}0568$$

$$\left(\frac{e}{b}\right)_y = \frac{M_{uy}}{P_u}\,\frac{1}{b} = \frac{5}{160} \times \frac{1}{0{,}35} = 0{,}0892$$

$$\frac{e}{h} = \sqrt{\left(\frac{e}{h}\right)_x^2 + \left(\frac{e}{b}\right)_y^2} = \sqrt{0{,}0568^2 + 0{,}892^2} = 0{,}1058$$

$$K = \frac{Pu}{f'cbh} = \frac{160\,000}{210 \times 35 \times 55} = 0{,}395$$

De los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas pág. 59, se tiene que $p_t < 1\%$.
Es decir, según este método la sección requiere el mínimo de acero $p_t = 0{,}01$
Nótese que el método no es muy preciso.

Para Caso de Carga II

$$\left(\frac{e}{h}\right)_x = \frac{Mux}{Pu}\,\frac{1}{h} = \frac{12}{169} \times \frac{1}{0{,}55} = 0{,}129$$

$$\left(\frac{e}{b}\right)_y = \frac{Muy}{Pu}\,\frac{1}{b} = \frac{3{,}75}{169} \times \frac{1}{0{,}35} = 0{,}063$$

$$\Rightarrow \frac{e}{h} = \sqrt{0{,}129^2 + 0{,}063^2} = 0{,}143$$

Ing. Juan F. Díaz C.
ING. CIVIL
CIV 41210

$$K = \frac{169.000}{210 \times 35 \times 55} = 0{,}418$$

De los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas pág. 41, se tiene que $p_t < 1\%$

Caso igual al anterior.

Para Caso de Carga III

$$\left(\frac{e}{h}\right)_x = \frac{Mux}{Pu}\,\frac{1}{h} = \frac{4{,}5}{190} \times \frac{1}{0{,}55} = 0{,}043$$

$$\left(\frac{e}{b}\right)_y = \frac{Muy}{Pu}\,\frac{1}{b} = \frac{17{,}8}{190} \times \frac{1}{0{,}35} = 0{,}267$$

$$\Rightarrow \frac{e}{h} = \sqrt{0{,}043^2 + 0{,}267^2} = 0{,}271$$

$$K = \frac{190.000}{210 \times 35 \times 35} = 0{,}470$$

De los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas pág. 59, se tiene que $p_t = 0{,}01912$.

Para el diseño final se toma el p_t mayor de los tres casos calculados, en este caso $p_t = 0{,}01912$.

$p_t = 0{,}01912 \Rightarrow A_{st} = 0{,}01912 \times 35 \times 55 = 36{,}8\ cm^2 \Rightarrow$ Usar 12 Ø 7/8".

Ahora se debe chequear el factor Bresler F.B.

Se calcula el nuevo $p_t = \dfrac{12 \times 3,87}{35 \times 55} = 0,0241$

Comprobación por Bresler

Con los valores anteriormente determinados:

$K_u = 0,470$

$\left(\dfrac{e}{h}\right)_x = 0,043$

$\left(\dfrac{e}{b}\right)_y = 0,267$

$p_t = 0,0241$

Se determinan los parámetros K_{ox}, K_{oy} y K_o con los Diagramas mencionados, de la siguiente forma:

Para $\left(\dfrac{e}{h}\right)_x = 0,043$ y $p_t = 0,024$ => De Diagramas se obtiene $K_{ox} = 0,78$

Para $\left(\dfrac{e}{b}\right)_y = 0,267$ y $p_t = 0,024$ => De Diagramas se obtiene $K_{oy} = 0,46$

Para $\left(\dfrac{e}{h}\right)_o = 0$ y $p_t = 0,024$ => De Diagramas se obtiene $K_o = 0,88$

Chequeo del Factor de Bresler F.B.

$F.B. = \dfrac{0,47}{0,78} + \dfrac{0,47}{0,46} - \dfrac{0,47}{0,88} = 1,09 > 1$ La sección es insuficiente

En este caso se debe aumentar el porcentaje de acero, por lo tanto lleva a 12 Ø 1"

$p_t = \dfrac{12 \times 5,07}{35 \times 55} = 0,0316$

Repitiendo otra vez el proceso, se tiene:

Para $\left(\dfrac{e}{h}\right)_x = 0,043$ y $p_t = 0,0316$ => De Diagramas se obtiene $K_{ox} = 0,9$

Para $\left(\dfrac{e}{h}\right)_y = 0,267$ y $p_t = 0,0316$ => De Diagramas se obtiene $K_{oy} = 0,55$

Para $\left(\frac{e}{h}\right)_o = 0$ y $p_t = 0{,}0316$ => De Diagramas se obtiene $K_o = 1{,}20$

Chequeando Factor de Bresler F.B.

$$F.B. = \frac{0{,}47}{0{,}9} + \frac{0{,}47}{0{,}55} - \frac{0{,}47}{1{,}2} = 0{,}98 < 1$$ Se acepta la sección. OK

b) DISEÑO POR METODO ANALITICO DE LA EXCENTRICIDAD EQUIVALENTE

$$\gamma_x = \frac{55 - 2 \times 5}{55} = 0{,}81 \quad y \quad \gamma_y = \frac{35 - 2 \times 5}{35} = 0{,}71$$

Se determinar P_b por la expresión:

$$P_b = 0{,}70 \left[0{,}85^2 \times 210 \left(\frac{6.300}{6.300 + 4.200} \right) \left(\frac{1 + \gamma}{2} \right) \right] bh$$

En vista que hay γ_x y γ_y se determinan las P_{bx} y P_{by} respectivas.

Para $\gamma_x = 0{,}81$ => $P_{bx} = 108{,}8$ T.
Para $\gamma_y = 0{,}71$ => $P_{by} = 102{,}8$ T.

En este método analítico se debe comparar P_u contra P_b, para luego determinar el área de acero requerido según sea el caso.

$$\text{Si} \quad P_u > P_b \Rightarrow A_s = A'_s = \left(\frac{P_u}{\emptyset} - \frac{f'_c bh}{\frac{12}{(1+\gamma)^2} \frac{e}{h} + 1{,}18} \right) \left(\frac{\frac{e}{\gamma h} + 0{,}5}{f_y} \right)$$

$$\text{Si} \quad P_u < P_b \Rightarrow A_s = A'_s = \frac{P_u}{2\emptyset\, f_y\, \gamma} \left[\frac{2e}{h} - 1 + \frac{P_u}{\emptyset\, 0{,}85\, f'_c bh} \right]$$

Para Caso de Carga I
Del caso anterior se tiene determinado $e/h = 0{,}1058$

Para $\gamma_x = 0{,}81$ => $P_{bx} = 108{,}8$ T. < $P_u = 160$ T. => $A_{sx} = A'_{sx} < 0$

Para $\gamma_y = 0{,}71$ => $P_{by} = 102{,}8$ T. < $P_u = 160$ T. => $A_{sy} = A'_{sy} < 0$

Para Caso de Carga II
Del caso anterior se tiene determinado e/h = 0,143

Para γ_x = 0,81 => Pbx = 108,8 T. < Pu = 169 T. => Asx = As'x < 0

Para γ_y = 0,71 => Pby = 102,8 T.< Pu = 169 T. => Asy = As'y = 2,03 cm²

Para Caso de Carga III
Del caso anterior se tiene determinado e/h = 0,271

Para γ_x = 0,81 => Pbx = 108,8 T. < Pu = 190 T. => Asx = As'x = 18,96 cm²

Para γ_y = 0,71 => Pby = 102,8 T.< Pu = 190 T. => Asy = As'y = 19,95 cm²
En este caso usar 12 Ø 1"

El resultado es muy parecido al del caso anterior y la comprobación por Bresler es exactamente igual al procedimiento anterior.

c) DISEÑO POR 2da. ECUACION DE BRESLER

Para Caso de Carga I
Se tienen disponibles las siguientes ecuaciones, pero no se conoce cual de las dos se debe usar:

$$M_{oy} \approx M_{uy} + M_{ux}\frac{b}{h}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) \quad \Rightarrow \text{Si} \quad \frac{M_{uy}}{M_{oy}} > \frac{M_{ux}}{M_{ox}}$$

$$M_{ox} \approx M_{ux} + M_{uy}\frac{h}{b}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) \quad \Rightarrow \text{Si} \quad \frac{M_{uy}}{M_{oy}} < \frac{M_{ux}}{M_{ox}}$$

Sin embargo, se tienen también las siguientes expresiones de apoyo:

$$\frac{M_{oy}}{M_{ox}} = \text{Cte.}\,\frac{b}{h} \qquad \text{y} \qquad \frac{M_{ox}}{M_{oy}} = \frac{1}{\text{Cte.}}\,\frac{h}{b}$$

Donde Cte. es un número cercano a 1, asumiendo Cte = 0,9

$$\frac{M_{oy}}{M_{ox}} = \text{Cte.}\,\frac{b}{h} = 0{,}9\left(\frac{35}{55}\right) = 0{,}572$$

Haciendo la relación de momentos

$$\frac{\dfrac{M_{uy}}{M_{ux}}}{\dfrac{M_{oy}}{M_{ox}}} = \frac{\dfrac{5}{5}}{0{,}572} = 1,748 > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{uy}}{M_{oy}} > \frac{M_{ux}}{M_{ox}}$$

En este caso se cumple que la ecuación a usar corresponde al tramo AB

$$M_{oy} \approx M_{uy} + M_{ux}\frac{b}{h}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$$

Como no se conoce el valor de ß, el mismo se obtiene de las tablas dadas en función de un valor de porcentaje de acero, que aún no se conoce, entonces se toma el valor mínimo $p_t = 0,01$ y el máximo $p_t = 0,06$ y se prorratean los valores de ß obtenidos con esos dos valores.

Para $p_{mín} = 0,01 \Rightarrow P_o = Ø\,(0,85\ f'_c\,bh + p_t\,bhf_y)$

$P_o = 0,7(0,85 \times 210 \times 35 \times 55 + 0,01 \times 35 \times 55 \times 4.200) = 297.125$ Kg.

$$\frac{P_u}{P_o} = \frac{160.000}{297.124} = 0,53 \Rightarrow \text{ De las tablas } ß = 0.65$$

Para $p_{máx} = 0,06 \Rightarrow P_o = Ø\left(0,85\ f'_c bh + p_t bhf_y\right)$

$P_o = 0,7(0,85 \times 210 \times 35 \times 55 + 0,06 \times 35 \times 55 \times 4.200) = 580.099$ Kg.

$$\frac{P_u}{P_o} = \frac{160.000}{580.099} = 0,275 \Rightarrow \text{ De las tablas } ß = 0,63$$

Se toma promedio ß = 0,64

Aplicando la ecuación correspondiente de M_{oy}

$$M_{oy} = 5 + 5\frac{0,35}{0,55}\left(\frac{1 - 0,64}{0,64}\right) = 6,789 \text{ T–m}$$

$$\left(K\frac{e}{b}\right)_{u} = \frac{M_{oy}}{f'_c\,hb^2} = \frac{6.789}{210 \times 35 \times 55 \times 0,35} = 0,04798$$

$$K_u = \frac{P_u}{f'_c\,bh} = \frac{160.000}{210 \times 35 \times 55} = 0,397$$

Entrando a los Diagramas de Interacción Adicionales del Autor, Tablas y Gráficas pág. 59, se obtiene $p_t < 1\%$

Para Caso de Carga II

Al igual que el caso de Carga I no se sabe cual es la ecuación a utilizar, siguiendo el mismo procedimiento.

Asumiendo la misma Cte = 0,9 se obtiene la relación.

$$\frac{M_{oy}}{M_{ox}} = 0,572 \qquad \textit{(Igual al caso de carga I)}$$

$$\frac{\frac{M_{uy}}{M_{ux}}}{\frac{M_{oy}}{M_{ox}}} = \frac{\frac{3,75}{12,00}}{0,572} = 0,546 < 1 \Rightarrow \frac{M_{uy}}{M_{oy}} < \frac{M_{ux}}{M_{ox}}$$

En este caso se cumple que la ecuación a usar corresponde al tramo BC

$$M_{ox} = M_{ux} + M_{uy}\,\frac{h}{b}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$$

Determinación del valor de ß, con el mismo procedimiento anterior.

$$\text{Para } p_{mín} = 0.01 \quad \Rightarrow P_o = 297.124 \text{ Kg.} \Rightarrow \frac{P_u}{P_o} = \frac{169.000}{297.124} = 0{,}568 \quad \Rightarrow \beta = 0{,}66$$

$$\text{Para } p_{máx} = 0.06 \quad \Rightarrow P_o = 580.099 \text{ Kg.} \Rightarrow \frac{P_u}{P_o} = \frac{169.000}{580.099} = 0{,}2913 \quad \Rightarrow \beta = 0{,}59$$

Se toma valor promedio de ß = 0,63

Aplicando la ecuación correspondiente M_{ox}

$$M_{ox} = 12 + 3{,}75\,\frac{0{,}55}{0{,}35}\left(\frac{1-0{,}63}{0{,}63}\right) \Rightarrow 15{,}460 \text{ T-m}$$

$$\left(K\frac{e}{h}\right)_{ox} = \frac{M_{ox}}{f'c\,hb^2} = \frac{15.460}{210 \times 35 \times 55 \times 0{,}55} = 0{,}07$$

$$K_u = \frac{P_u}{f'c\,bh} = \frac{169.000}{210 \times 35 \times 35} = 0{,}418$$

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Tablas y Gráficas pág. 59 , se obtiene $p_t < 1\%$

Para Caso de Carga III

Al igual que el caso de Carga II, no se sabe cual es la ecuación a utilizar, siguiendo el mismo procedimiento.

Asumiendo la misma Cte = 0,9, se obtienen la relación:

$$\frac{M_{oy}}{M_{ox}} = 0{,}572 \qquad \textit{(Igual al caso de carga I)}$$

$$\frac{\dfrac{M_{uy}}{M_{ux}}}{\dfrac{M_{oy}}{M_{ox}}} = \frac{\dfrac{17{,}8}{4{,}5}}{0{,}572} = 0{,}91 < 1 \Rightarrow \frac{M_{uy}}{M_{oy}} < \frac{M_{ux}}{M_{ox}}$$

En este caso se cumple que la ecuación a usar corresponde al tramo BC

$$M_{ox} = M_{ux} + M_{uy}\,\frac{h}{b}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$$

Determinación del valor de ß, con el mismo procedimiento anterior.

Para $p_{mín}$ = 0,01 => P_o = 297.124 Kg. => $\frac{P_u}{P_o} = \frac{190.000}{297.124} = 0,639$ => ß = 0,68

Para $p_{máx}$ = 0,06 => P_o = 580.099 Kg. => $\frac{P_u}{P_o} = \frac{190.000}{580.099} = 0,327$ => ß = 0,69

Se toma valor pormedio de ß = 0,69

Aplicando la ecuación correspondiente M_{ox}

$$M_{ox} = 4,5 + 17,8\ \frac{0,55}{0,35} = \left(\frac{1 - 0,69}{0,69}\right) = 17.067 \text{ T-m}$$

$$\left(K\frac{e}{h}\right)_{ox} = \frac{M_{ox}}{f_c'\ bh^2} = \frac{17.067}{210 \times 35 \times 55 \times 0,55} = 0,077$$

$$K_u = \frac{190.000}{210 \times 35 \times 55} = 0,470$$

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Tablas y Gráficas pág. 59, se obtiene $p_t < 1\%$

Como en todos los casos de carga se obtuvo $p_t < 1$, se toma para el diseño $p_t = 0,01$ por norma.

Area de acero total => $A_{st} = 0,01 \times 35 \times 55 = 19,25$ cm^2
Usar 8 Ø 3/4" => $A_{st} = 8 \times 2,84$ cm^2 = 22,72 cm^2

Determinación del verdadero porcentaje de acero p_t

$$p_t = \frac{22,72}{35 \times 55} = 0,0118$$

Conociendo la verdadera magnitud del área de acero, es necesario comprobar el Factor de Bresler F.B.
Verdadero P_o
$P_o = 0,7\,(0,85 \times 210 \times 35 \times 55 + 0,0118 \times 35 \times 55 \times 4200) = 307.311$ Kg.

$$\frac{P_u}{P_o} = \frac{190.000}{307.311} = 0,618$$

Con p_t=0,0118 se determina el verdadero valor de ß en las tablas, tomando para el caso de 8 cabillas ß=0,65 y así mismo se determinan los valores de M_{ox} y M_{oy}
Determinación de M_{ox} para p_t=0,0118

De los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Tablas y Gráficas pág. 59, con los parámetros γ_x y K_u se obtiene $(K\ e/h)_x$.

$$\left.\begin{array}{l} p_t = 0{,}0118 \\ \gamma_x = \dfrac{55 - 2x\,5}{55} = 0{,}818 \approx 0{,}8 \\ K_u = 0{,}470 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se tiene que} \left(K\frac{e}{h}\right)_x = 0{,}09$$

El valor del momento M_{ox}

$$M_{ox} = \left(K\frac{e}{h}\right)_x f'c\, bh^2 = 0{,}09 \times 210 \times 35 \times 55 \times 0{,}55 = 20.010 \text{ K–m}$$

Determinación de M_{oy} para el $p_t = 0{,}0118$

De los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Tablas y Gráficas pág. 59, con los parámetros γ_y y K_u se obtiene (K e/b) y

$$\left.\begin{array}{l} p_t = 0{,}0118 \\ \gamma_y = \dfrac{35 - 2x\,5}{35} = 0{,}71 \approx 0{,}70 \\ K_u = 0{,}470 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se tiene que} \left(K\frac{e}{h}\right)_y = 0{,}086$$

El valor del momento M_{oy}

$$M_{oy} = \left(K\frac{e}{b}\right)_y f'c\, hb^2 = 0{,}086 \times 210 \times 55 \times 35 \times 0{,}35 = 12.168 \text{ K–m}$$

Como comprobación de la 2da. Ecuación de Bresler, se debe cumplir la siguiente relación.

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{ox}}\right) + \left(\frac{M_{uy}}{M_{oy}}\right)\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) = 1 \qquad \text{porque} \qquad \frac{M_{uy}}{M_{oy}} < \frac{M_{ux}}{M_{ox}}$$

Luego, sustituyendo.

$$\left(\frac{4{,}5}{20.010}\right) + \left(\frac{17{,}8}{12.168}\right)\left(\frac{1 - 0{,}65}{0{,}65}\right) = 0{,}99 < 1 \text{ OK}$$

CONCLUSION

Como es posible comparar, los dos primeros métodos arrojaron resultados muy parecidos y el tercer método difiere en la cantidad de acero, en este

caso lo que sucede es que los dos primeros métodos están basados en el concepto de una excentricidad adimensional equivalente, lo cual no es la verdad, ya que:

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} \qquad \text{pero no es verdad que } \frac{e}{h} = \sqrt{\left(\frac{e}{h}\right)_x^2 + \left(\frac{e}{h}\right)_y^2}$$

Esto sólamente sería verdad, en el caso de columnas cuadradas y con acero igual en sus cuatro caras, en conclusión, los dos primeros métodos siempre serán bastante conservadores respecto al último. Como comprobación de lo dicho anteriormente se resulve el próximo ejercicio.

3. 7. 2 EJERCICIO Nº 2

Diseñar la columna cuadrada con las cargas $P_u = 100$ T. , $M_{ux} = 18$ T-m y $M_{uy} = 15$ T-m , con un recubrimiento de 4 cm. y materiales concreto f'_c = $f'_c = 210$ K/cm² y acero $f_y = 4.200$ K/cm²

Predimensionado
Se asume columna del tipo esquinera.

$$A_c = \frac{P_u}{0{,}35\ f'_c} = \frac{100.000}{0{,}35 \times 210} = 1.360 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{Se toma } 40 \times 40 \text{ cms.}$$

$$\gamma = \frac{40 - 2x4}{40} = 0{,}8$$

Ing. Juan F. Díaz C.
ING. CIVIL
CIV [illegible]

a) DISEÑO POR EL METODO DE LA EXCENTRICIDAD EQUIVALENTE

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{e}{h}\right)_x = \frac{e_x}{h} = \frac{M_{ux}}{P_u}\frac{1}{h} = \frac{18}{100} \times \frac{1}{0{,}40} = 0{,}450 \\ \left(\frac{e}{h}\right)_y = \frac{e_y}{b} = \frac{M_{uy}}{P_u}\frac{1}{b} = \frac{15}{100} \times \frac{1}{0{,}40} = 0{,}375 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{e}{h} = \sqrt{0{,}4250^2 + 0{,}375^2} = 0{,}585$$

$$K_u = \frac{P_u}{f'_c\, bh} = \frac{100.000}{210 \times 40 \times 40} = 0{,}2976$$

De los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Tablas y Gráficas pág 59, se obtiene $p_t = 0{,}0284$
El área de acero $A_{st} = 0{,}0284 \times 40 \times 40 = 45{,}44$ cm² => Usar 12 Ø 7/8"

b) DISEÑO POR EL METODO ANALITICO DE LA EXCENTRICIDAD EQUIVALENTE

Conocidos $\frac{e}{h} = 0{,}585$ y $\gamma = 0{,}80$, se determina P_b

$$P_b = 0{,}7\left[0{,}85^2 \times 210\left(\frac{6.300}{6.300 + 4.200}\right)\left(\frac{1 + 0{,}80}{2}\right)\right] 40\text{x}40 = 91.763 \text{ T.}$$

Como $P_u > P_b$, la falla es del tipo a compresión, entonces :
$A_s = A_{sx} = A'_{sx} = A_{sy} = A'_{sy}$ ya que es una columna cuadrada.

$$A_s = \left(\frac{100.000}{0{,}7} - \frac{210 \times 40 \times 40}{\frac{12}{(1 + 0{,}77)^2} \times 0{,}585 + 1{,}18}\right)\left(\frac{\frac{0{,}585}{088} + 0{,}5}{4.200}\right) = 12{,}44 \text{ cm}^2$$

Usar 12 Ø7/8"

Determinación del verdadero porcentaje de acero p_t

$$p_t = \frac{12 \times 3{,}87}{40 \times 40} = 0{,}029$$

Conocida la magnitud del área de acero, se comprueba el Factor de Bresler F.B.

Con los valores conocidos de porcentaje de acero p_t y las excentricidades calculadas, se determinan los correspondientes valores de K con los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Tablas y Gráficas pág. 59.

Para $\left(\frac{e}{h}\right)_x = 0{,}45$ y $p_t = 0{,}029$ => $K_{ox} = 0{,}370$

Para $\left(\frac{e}{h}\right)_y = 0{,}375$ y $p_t = 0{,}029$ => $K_{oy} = 0{,}420$

Para $\left(\frac{e}{h}\right)_0 = 0$ y $p_t = 0{,}029$ => $K_o = 0{,}980$

Chequeo del Factor de Bresler F.B.

$$\text{F.B.} = \frac{K_u}{K_{ox}} + \frac{K_u}{K_{oy}} - \frac{K_u}{K_o}$$

$$F.B = \frac{0{,}2976}{0{,}37} + \frac{0{,}2976}{0{,}42} - \frac{0{,}2976}{0{,}98} = 1{,}20 > 1$$ => La sección es insuficiente.

Se aumenta el porcentaje de acero a 12 Ø 1" => $p_t = \frac{12 \times 5{,}07}{40 \times 40} = 0{,}0389$

Repitiendo procedimiento

Para $(e/h)_x = 0{,}45$ => $K_x = 0{,}425$

Para $(e/h)_y = 0{,}375$ => $K_y = 0{,}48$

Para $(e/h)_o = 0{,}0$ => $K_o = 1{,}10$

$$F.B. = \frac{0{,}2976}{0{,}425} + \frac{0{,}2976}{0{,}48} - \frac{0{,}2976}{1{,}10} = 1{,}04$$

Se acepta por ser muy cercano a 1.

c) DISEÑO POR 2da. ECUACION DE BRESLER

Como la sección es cuadrada de 40x40 y con aceros simétricos, se cumple.

$$\frac{M_{ox}}{M_{oy}} = 1$$

$$\frac{\frac{M_{uy}}{M_{ux}}}{\frac{M_{oy}}{M_{ox}}} = \frac{15}{18} = 0{,}83 < 1 \Rightarrow \frac{M_{uy}}{M_{oy}} < \frac{M_{ux}}{M_{ox}}$$

En este caso la ecuación a utilizar corresponde al tramo BC

$$M_{ox} = M_{uy} + M_{uy}\,\frac{h}{b}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)$$

Se determina el valor de ß en las tablas, tomando porcentaje $p_{mín}$ y $p_{máx}$ para luego promediarlos.

Para $p_{mín} = 0{,}01$ => $P_o = 246{,}96$ T.

Relación $\frac{P_u}{P_o} = \frac{100}{246{,}96} = 0{,}405$ => De las tablas ß = 0,62

Para $p_{máx} = 0{,}06$ => $P_o = 482{,}16$ T.

Relación $\frac{P_u}{P_o} = \frac{100}{482{,}16} = 0{,}207$ => De las tablas ß = 0,61

Se toma como promedio ß = 0,62

Determinación del Momento M_{oy}

$$M_{ox} = 18 + 15\frac{0{,}40}{0{,}40}\left(\frac{1-0{,}62}{0{,}62}\right) = 27{,}19 \text{ T-m}$$

$$\left(K\frac{e}{h}\right)_{ox} = \frac{M_{ox}}{f'_c\, bh^2} = \frac{27.190}{210 \times 40 \times 40 \times 0{,}40} = 0{,}202$$

$$K = \frac{P_u}{f'_c bh} = \frac{100.000}{210 \times 40 \times 40} = 0{,}297$$

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Tablas y Gráficas pág 59, con los valores de K y Ke/h, se obtiene $p_t = 0{,}035$
Luego, $A_{st} = 0{,}035 \times 40 \times 40 = 56{,}00$ cm² => Usar 12 Ø1"

El verdadero porcentaje de acero:

$$p_t = \frac{12 \times 5{,}07}{40 \times 40} = 0{,}038$$

Se determina el verdadero valor de ß

Para $p_t = 0{,}038$ => $P_o = 378{,}67$ T.

La relación $\frac{P_u}{P_o} = \frac{100}{378{,}67} = 0{,}264$ => De las tablas ß = 0,59

En este caso se tiene que $M_{ux} = M_{oy}$

De los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Tablas y Gráficas pág. 59, con los parámetros γ, K_u y p_t, se obtiene $K\frac{e}{h}$

$$\left.\begin{array}{l} p_t = 0.038 \\ \gamma = 0{,}8 \\ K_u = 0{,}2976 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(K\frac{e}{h}\right)_{x=y} = 0{,}212$$

$$M_{ox} = 0{,}212 \times 210 \times 40 \times 40 \times 0{,}4 = 28.493 \text{ K-m}$$

Comprobación de la 2da. Ecuación de Bresler.

$$\frac{M_{ux}}{M_{ox}} + \left(\frac{M_{uy}}{M_{oy}}\right)\left(\frac{1-ß}{ß}\right) = 1$$

$$\frac{18}{28{,}493} + \frac{15}{28{,}493}\left(\frac{1 - 0{,}59}{0{,}59}\right) = 0{,}99 < 1 \text{ OK}$$

3. 7. 3 EJERCICIO Nº 3

Comprobar por el método simplificado de Gouwens, si una columna de 40 x 45 con 12 ϕ1" distribuido en sus cuatro caras, con concreto f'_c = 250 K/cm² y con acero f_y= 4.200 K/cm², puede resistir las solicitaciones P_u=200 T., M_{ux} =15 T-m y M_{uy} = 20 T-m, considérese γ=0,80.

Se détermina porcentaje de acero p_t

$$p_t = \frac{A_{st}}{bh} = \frac{12 \times 5{,}07}{40 \times 45} = 0{,}0338 \Rightarrow 3{,}38\ \%$$

Se determina el valor de $\beta_{mín}$, en este caso con la relación:

$$\frac{A_{st}\, f_y}{f'_c bh} = \frac{12 \times 5{,}07 \times 4.200}{250 \times 40 \times 45} = 0{,}5678 > 0{,}5$$

$$\beta_{mín} = 0{,}485 + 0{,}03\left(\frac{A_{st}\, f_y}{f'_c bh}\right)$$

$$\beta_{mín} = 0{,}485 + 0{,}03\left(\frac{12 \times 5{,}07 \times 4.200}{250 \times 40 \times 45}\right) = 0{,}5020$$

Como P_u = 200.000 Kg. > $0{,}25 f'_c bh$ = 0,25 x 250 x 40 x 45 = 112.500 Kg.

$$\beta = \beta_{mín} + 0{,}2\left(\frac{\dfrac{P_u}{f'_c bh} - 0{,}25}{0{,}85 + \dfrac{A_{st}\, f_y}{f'_c bh}}\right)$$

$$\beta = 0{,}5020 + 0{,}2\left(\frac{\dfrac{200.000}{250 \times 40 \times 45} - 0{,}25}{0{,}85 + 0{,}5678}\right) = 0{,}5294$$

Se determina M_{oy} o M_{ox} por los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor Tablas y Gráficas pág 62, con los parámetros K_u, γ y p_t obteniendo K (e/b).

$$\left.\begin{aligned} K_u &= \frac{200.000}{250 \times 40 \times 45} = 0{,}444 \\ \gamma &= 0{,}8 \\ p_t &= 0{,}0338 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Se tiene } K\frac{e}{h} = K\frac{e}{b} = 0{,}1524$$

Nota: El valor adimensional K e/h = K e/b = 0,1524 sirve para obtener M_{oy} y M_{ox} indistintamente.

$$M_{oy} = K_u\left(\frac{e}{b}\right) f'c\, b h^2 \Rightarrow M_{oy} = 0,1524 \times 250 \times 45 \times 40 \times 0,40 = 27.432 \text{ K-m}$$

Se determina M_{ox} conocido M_{oy}

$$M_{ox} = \frac{M_{oy}\ h}{b} = \frac{27.432 \times 45}{40} = 30.861 \text{ K-m}$$

Se chequea el Factor de Bresler F.B.

$$\frac{M_{ux}}{M_{ox}}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) + \frac{M_{uy}}{M_{ox}} = \left(\frac{15.000}{30.861}\right)\left(\frac{1-0,5294}{0,5294}\right) + \frac{20.000}{27.432} = 1,161 > 1$$

Insuficiente, la columna no resiste las solicitaciones
En este caso el Factor de Bresler es mayor que uno (1) lo cual implica que la sección de la columna es muy pequeña, hay dos soluciones a saber:

1.- Aumentar la sección de concreto.
2.- Aumentar el porcentaje de acero.

Para el diseño, se recomienda la solución Nº 2, ya que esto evitaría posibles modificaciones de rigideces que puedan afectar en la determinación de las solicitaciones finales sobre la estructura.

Al tomar la solución Nº 2 incrementando el número de cabillas a 16 Ø1" se tiene.

El porcentaje de acero aumenta $p_t = \dfrac{16 \times 5,07}{40 \times 45} = 0,0451$

Repitiendo el procedimiento anterior se determina $\beta_{mín}$

$$\frac{A_{st}\ f_y}{f'c\ b\ h} = 0,7571 > 0,5 \Rightarrow \beta_{mín} = 0,5246 \Rightarrow \beta = 0,5488$$

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Tablas y Gráficas pág. 62.

$$\left.\begin{array}{l} K_u = 0,444 \\ \gamma = 0,80 \\ p_t = 0,0451 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se tiene } K\frac{e}{h} = K\frac{e}{b} = 0,185$$

Desarrollando por igual procedimiento se obtienen los valores de Muy y Mox

$$Muy = K\left(\frac{e}{b}\right) f'c\,h\,b^2 = 0{,}185 \times 250 \times 45 \times 40 \times 0{,}40 = 33.300 \text{ K-m}$$

$$Mox = \frac{Moy\ h}{b} = \frac{33.300 \times 45}{40} = 37.462 \text{ K-m}$$

Chequeo del Factor de Bresler F.B.

$$F.B. = \frac{Mux}{Mox}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) + \frac{Muy}{Mox} = \left(\frac{15.000}{37.462}\right)\left(\frac{1-0{,}5399}{0{,}5399}\right) + \frac{20.000}{33.300} = 0{,}941 < 1$$

Como el Factor de Bresler es < 1 se acepta el porcentaje de acero $p_t = 0{,}0451$.

CAPITULO IV

Esbeltez

4.1 INTRODUCCION

El tema de columnas ha producido múltiples discusiones debido al tipo de comportamiento que presentan ya sean éstas del llamado tipo corto o del tipo largo, (también llamadas esbeltas), sea cualquiera el tipo aún hay mucho que investigar, el método de diseño que aquí se presenta para columnas esbeltas es sólo uno de los tantos que existen, pero parece ser el más apropiado y lógico sin menospreciar los hasta ahora utilizados.

4.2 ESBELTEZ

Se define efecto de esbeltez en una columna, como la reducción de la resistencia de carga última al encontrarse sujeta a una carga de compresión o flexo-compresión, ésto debido a que la relación entre la longitud de la columna a las dimensiones transversales es muy grande, el efecto que se acaba de describir se llama falla por esbeltez o pandeo lateral y se puede ver en la Fig. 4.1

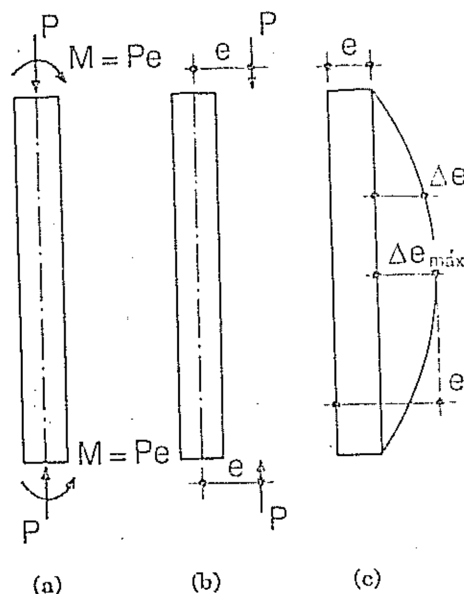


Figura 4.1

En la Fig. 4.1 una columna con determinadas condiciones de borde es solicitada en sus extremos por efecto de una carga axial y un momento (Fig. 4.1.a) o lo que es lo mismo por una carga excéntrica (Fig. 4.1.b). La deformación originada por la flexión resultante, genera excentricidad

extra a la causada por el momento flexionante, es decir que $e'=e+\Delta e$ (Fig. 4.1.c) , en la que $e = M/P$ y Δe es la excentricidad adicional debido a la deflexión resultante, como consecuencia de ésto, en determinado punto de la columna por efecto de esa curvatura que se origina por inestabilidad de ella, se está generando un extra-momento que la columna recibe, ya que se tiene: $Pe = M$ y $P\,\Delta e = \Delta M$, por lo tanto el momento total será $M' = M + \Delta M = P\,e + P\,\Delta\,e = P\,(e + \Delta\,e) = Pe'$ y el momento máximo será en la mitad de la altura, donde alcanza este valor. Es evidente, que al exigirle a una sección a flexo-compresión un momento adicional $\Delta M = P\,\Delta\,e$, la resistencia a compresión disminuye respecto a la resistencia que tendría si sólo se le aplica un momento $M = P\,e$, luego, es ésto lo que se ha llamado efecto de esbeltez. Se ha generalizado el nombre de momento secundario el valor $\Delta M = P\,\Delta\,e_{max}$ y momento primario al valor originado $M = P\,e$, pero es necesario destacar que en determinados casos de "secundario" puede no tener nada, ya que podrían ser de mucha importancia dependiendo de las condiciones de borde, dimensiones de las columnas y por supuesto de la magnitud de las cargas actuantes. Por lo tanto, para su estudio las columnas se han clasificado como las que no tienen el efecto de esbeltez mencionado o que es despreciable éste frente a las dimensiones de las columnas o también llamadas como columnas "cortas" y a las que sí presentan el efecto de esbeltez que se les llama columnas "largas". No se puede dejar de mencionar también los momentos secundarios que pueden generar por los deplazamientos laterales a que son objeto las estructuras aporticadas, el cual se puede presentar como una columna en la cual sus extremos son desplazados y generando el efecto secundario, como se ve en la Fig. 4.2.

En la Fig. 4.2.a. se observa el desplazamiento a que fué objeto una columna y en la Fig. 4.2.b. se observa el incremento de momentos ΔM, llamado momento secundario.

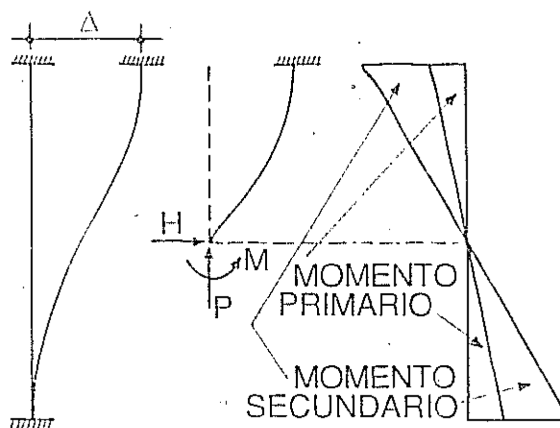


Figura 4.2

En la Fig. 4.3 se muestra el diagrama de interacción de una columna diseñada para resistir sólo los momentos primarios $M = Pe$ (Pto. 1), al exigirle aceptar el nuevo momento secundario $\Delta M = P\Delta e$, sólo puede resistirlo si la columna acepta una disminución de la carga axial de P a P', donde $P' < P$ para colocarse en

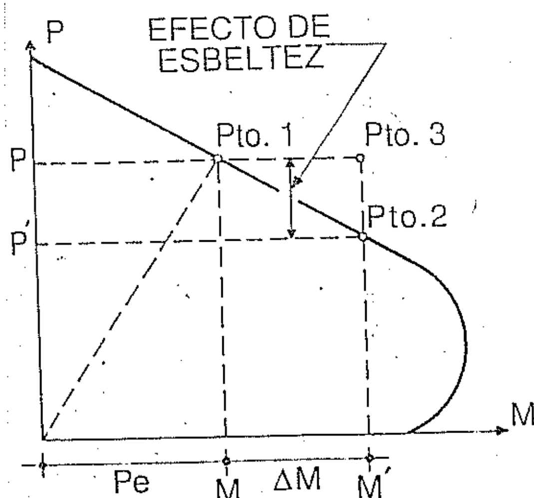


Figura 4.3

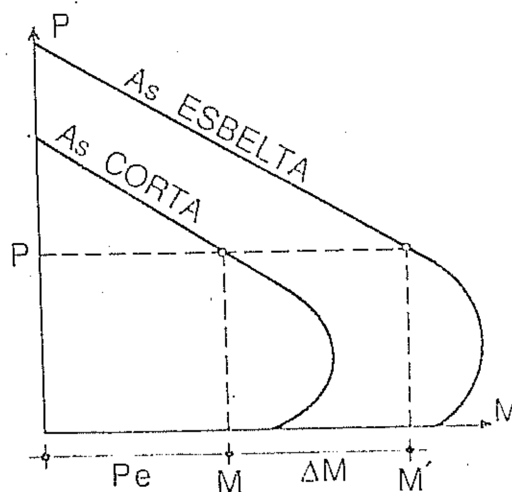


Figura 4.4

el Pto. 2, es decir, se manifiesta lo que se ha llamado "efecto de esbeltez" (reducción de la capacidad resistente), y también se puede ver el Pto. 3, el cual sería la posición para el incremento de momento ΔM pero con la misma carga P, es decir se sale de la curva, esto indica dos cosas:

1.- Que si a la columna se le somete a la carga P y M'=M+ΔM, es decir, si es solicitada por el efecto de esbeltez ésta no podría resistir las solicitaciones y simplemente sucumbe y rompe.

2.- Que si a la columna se le diseña por esbeltez, es decir, con un momento M'=M+ΔM, esto implica hacer un aumento a la columna del área de acero lo cual se puede ver en la Fig. 4.4.

Por lo tanto, la solución para una columna esbelta conocido el efecto del momento secundario es diseñar con una nueva área de acero mayor que el correspondiente como columna corta.

4.3 TIPOS DE FALLAS

En la Fig. 4.5 se pueden ver los tipos de fallas de las columnas esbeltas en principio se trata de que una columna sea corta o esbelta fallará siempre por material, es decir, que sus materiales componentes generan sus máximos esfuerzos y se encuentran en condiciones últimas o de rotura, lo cual se puede ver en la Fig. 4.5 expresado en los Ptos. 1 y 2, o sea, la falla de una columna corta y otra esbelta respectiva-

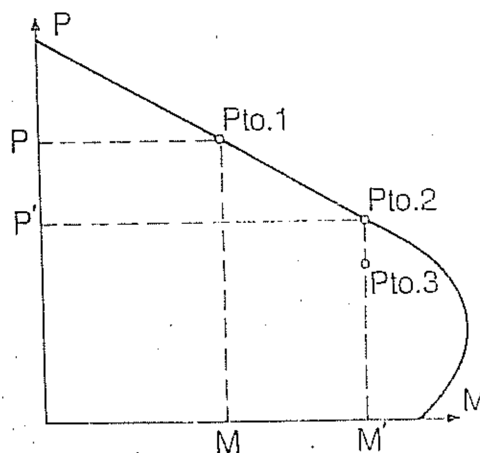


Figura 4.5

mente y manifestada precisamente en la curva, la cual define el límite de resistencia de las columnas. Sin embargo, cuando una columna es esbelta además de poder fallar por material puede hacerlo también por inestabilidad, es decir, el pandeo es tan grande que se inestabiliza antes de poder alcanzar el Pto. 2 de la curva, entonces se dice que ha fallado por inestabilidad lateral o pandeo, lo cual se vé es el Pto. 3.

Concluyendo, una columna esbelta puede fallar de dos tipos de formas:

1.- Por material, lo cual ocurre generalmente en columnas que se encuentran arriostradas contra deflecciones laterales como en edificios.

2.- Por inestabilidad lateral o pandeo, lo cual ocurre en columnas no arriostradas.

4.4 METODO DE CALCULO

Uno de los cálculos más complicados y laboriosos debido a las tantas variables que lo integrán, es la obtención del momento secundario actuante en un miembro, ya que ésto es causa de varios efectos, a saber:

1.- MAGNITUD DE LA CARGA. Esta es directamente proporcional al momento secundario.

2.- DURACION DE LA CARGA. También es directamente proporcional y si la carga actúa de manera contínua las deflecciones también lo hacen y de hecho los momentos secundarios, ésto disminuye la resistencia, creándose un ciclo que culmina al romperse la pieza.

3.- RIGIDEZ A LA FLEXION DEL MIEMBRO. Esta es inversamente proporcional a momento secundario, pues a mayor rigidez menores deflecciones y por lo tanto disminución del ΔM, la definición de rigidez a la flexión depende del módulo de elasticidad del miembro, de la inercia de la sección, de la cantidad de acero y la longitud de la columna.

4.- TIPO DE CURVATURA DEL MIEMBRO. Es de suma importancia conocer como es la elástica del miembro con el efecto del momento primario, ya que el momento del efecto secundario podría ser desfavorable o no.

5.- DESPLAZAMIENTO DE LOS APOYOS. A mayor posibilidad de desplazabilidad de una estructura mayor momento secundario posible, la desplazabilidad se encuentra afectada a su vez por la rigidez en la flexión de los miembros y por el tipo de carga sobre la estructura.

4.5 METODO DEL MOMENTO AMPLIFICADO

Este método considera que el efecto de un nuevo momento sobre una columna se manifiesta no sólo como un nuevo valor del momento llamado $\Delta M = P\Delta e$ de carácter variable lo cual se puede ver en la curva de la

Fig. 4.6, Pto. 2 , y el momento nuevo de diseño M'= M + ΔM se manifestará como parte del momento primario efectado por un coeficiente $\delta \geq 1$ el cual, como mínimo valor será de 1, o sea, M'= δM. La resolución del método sería de gran extensión y complicación, por lo cual las nuevas normas(1) confirmaron el uso del Método Simplificado del Momento Amplificado el cual fué expuesto por primera vez en el ACI 318.71, método que a pesar de ser una aproximación es lo bastante buena y se basa en la relación de la carga axial actuante P_u en la columna a la carga crítica P_c de la columna, de la relación de los momentos en los extremos de la columna y de la elástica de la misma. *(C. 10. 11. 5. 1.)*

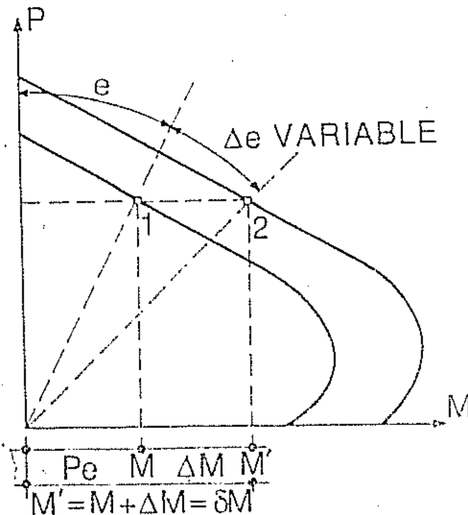


Figura 4.6

$$M' = \partial M \quad \text{Donde,} \quad \partial = \frac{C_m}{1 - \dfrac{P_u}{\O\, P_c}} > 1.$$

$$\text{O sea:} \quad M = \frac{C_m\, M}{1 - \dfrac{P_u}{\O\, P_c}} \qquad \textit{(A. 10. 11. 5. 1.)}$$

Donde, M' = Momento amplificado de diseño.
M = Momento primario actuante, mayor en los extremos.
δ = Factor amplificación del momento primario.
P_u = Carga axial de compresión actuante.
P_c = Carga crítica para la sección de concreto armado.
Ø = Coeficiente de ineficacia.
C_m = Factor que relaciona el diagrama equivalente de momento.

Se define Carga Crítica P_c como:

$$P_c = \frac{\pi^2 E I}{(K L_u)^2} \qquad \textit{(A. 10. 11. 5. 2.)}$$

$$\text{Donde,} \quad E I = \frac{\dfrac{E_c I_g}{5} + E_s I_s}{(1 + \beta_d)} \qquad \textit{(A. 10. 11. 5. 2.)}$$

(1) - Normas COVENIN MINDUR 1753-85

Permitiéndose también usar conservadoramente la expresión modificada de EI, igual a:

$$EI = \frac{Ec\ Ig}{2,5\ (1 + \beta d)}$$

Donde, Ec = Módulo de elasticidad del concreto.
Ig = Momento de inercia de la sección gruesa.
Es = Módulo de elasticidad del acero.
Is = Momento de inercia del acero.
ßd = Relación momento de carga muerta a momento total
K = Factor de longitud efectiva para miembros a compresión.
Lu = Longitud libre de un miembro a compresión.
KLu = Longitud efectiva de pandeo

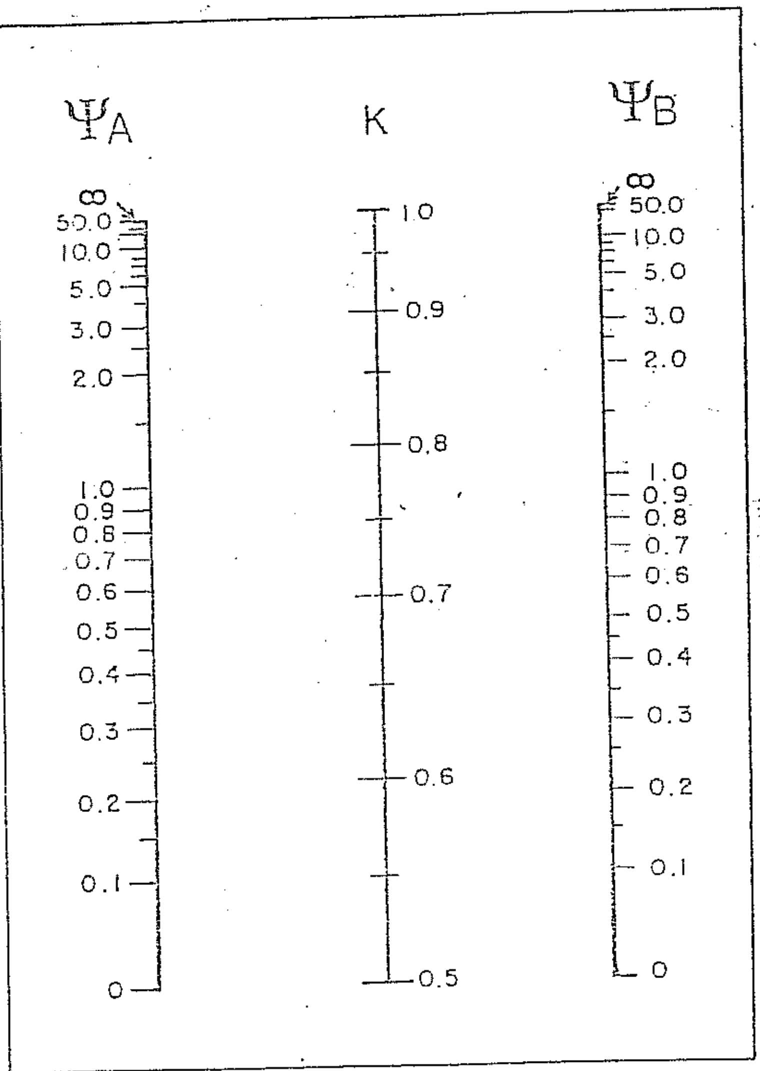
El uso de la expresión modificada EI es válida para porcentaje de acero no muy grande.
El valor KLu se llama longitud efectiva de pandeo o longitud de cálculo y depende del grado de restricción y condiciones de borde de las columnas además de la posibilidad de desplazamiento relativo entre sus extremos. Se puede definir el grado de restricción de los extremos de una columna si se conocen las rigideces de los miembros que le llegan a cada extremo (ya que es falso considerar que el empotramiento o las articulaciones son perfectas, es decir los valores de K teóricos dependiendo de condiciones de bordes ideales no son válidos) por medio de los Nomogramas de Jackson y Moreland, ver Fig. 4.7.
Los Nomogramas de Jackson y Moreland permiten determinar K gráficamente para una columna de sección transversal con inercia I constante, conocidas las relaciones en cada extremo de la columna de las rigideces de las columnas que llegan a un nodo a las rigideces de vigas que llegan a ese mismo nodo.

$$\psi_i = \frac{\Sigma\left(\frac{E\,I}{L}\right)_{\text{columnas } i}}{\Sigma\left(\frac{E\,I}{L}\right)_{\text{vigas } i}}$$

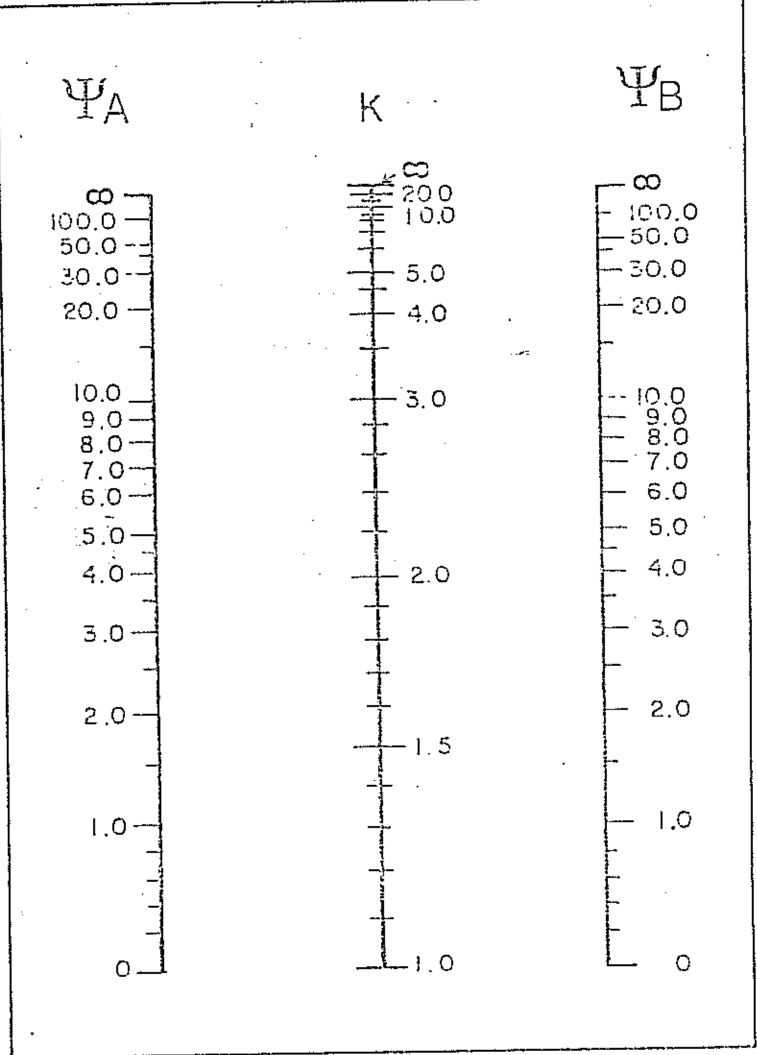
Donde, $\Sigma\left(\frac{E\,I}{L}\right)_{\text{columnas } i}$ = Sumatoria de las rigideces de las columnas que llegan al nodo i.

$\Sigma\left(\frac{E\,I}{L}\right)_{\text{vigas } i}$ = Sumatoria de las rigideces de vigas que llegan al nodo i

DIAGRAMAS DE JACKSON Y MORELAND



ESTRUCTURAS SIN DESPLAZABILIDAD



ESTRUCTURAS CON DESPLAZABILIDAD

Por lo tanto, conocido ψ_A y ψ_B en los extremos A y B de una columna, se puede obtener K dependiendo de que sea un sistema estructural que tenga desplazamiento lateral o no.

El valor Cm como se dijo anteriormente es un factor qué hace equivalencia del diagrama real de momentos con el diagrama de un elemento con momentos iguales en ambos extremos a fin de poder utilizar el valor del momento primario M, el valor de Cm está limitado al tipo de estructura

1.- Para elementos sin desplazabilidad lateral relativa entre sus apoyos y sin cargas transversales entre sus apoyos.

$$C_m = 0{,}6 + 0{,}4 \frac{M_1}{M_2} > 0{,}4$$

Si la columna deflecta con curvatura simple, ver Fig. 5.8.

$$C_m = 0{,}6 - 0{,}4 \frac{M_1}{M_2} > 0{,}4$$

Si la columna deflecta con curvatura doble, ver Fig. 5.9.

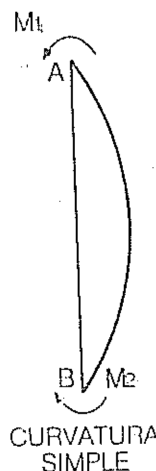


Figura 4.8

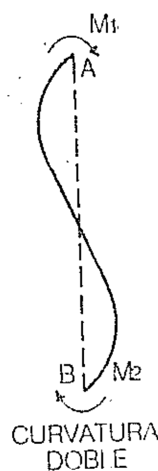


Figura 4.9

Donde, M_1 = Momento menor en un extremo de la columna.
M_2 = Momento mayor en el otro extremo de la columna.

2.- Para elementos con desplazamientos laterales relativos entre sus apoyos o con cargas transversales entre sus apoyos, Cm = 1

4.6 NORMAS Y CRITERIOS PARA EL DISEÑO

1.- La longitud libre de un miembro a compresión Lu, se tomará como la distancia libre entre losas de entrepisos, vigas u otros miembros capaces de proporcionar un apoyo lateral para el miembro sujeto a compresión. *(A. 10. 11. 1. 1.)*

2.- Cuando existan cartelas o capiteles de columnas, la longitud libre Lu se medirá al extremo inferior del capitel o cartela en el plano considerado. *(A. 10. 11. 1. 2.)*

3.- Para miembros sujetos a compresión sin posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos, el factor K de longitud efectiva se

tomará como 1, a menos que el análisis demuestre que se puede usar un valor menor. *(A. 10. 11. 2. 1.)*

4.- Para miembros sujetos a compresión con posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos el factor K de longitud efectiva se considerará tomando en cuenta el agrietamiento y el refuerzo para la rigidez relativa y debe ser un mayor que 1. *(A. 10. 11. 2.2.)*

5.- El radio de giro "r" puede considerarse.

a.- Para columnas rectangulares r ≈ 0,30 h

b.- Para las columnas circulares r ≈ 0,25 Ø

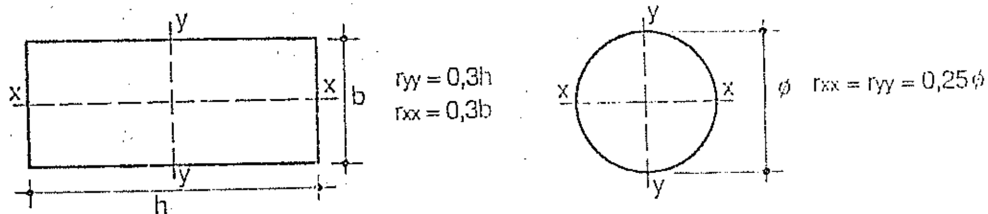


Figura 4.10

6.- Para miembros sujetos a compresión sin posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos, los efectos de esbeltez no se considerarán si se cumple que la relación de esbeltez.

$$\lambda = \frac{KLu}{r} < 34 - 12\,\frac{M_1}{M_2}$$ *(A 10. 11. 4. 1.)*

Donde, λ = Relación de Esbeltez.

M_1 = Momento menor en un extremo de la columna.

M_2 = Momento mayor en el otro extremo de la columna.

7.- Para miembros sujetos a compresión con posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos los efectos de esbeltez no se considerarán si se cumple la relación de esbeltez.

$$\lambda = \frac{KLu}{r} < 22$$

8.- No se podrá utilizar el método simplificado del momento amplificado si se cumple que le relación de esbeltez.

$$\lambda = \frac{KLu}{r} > 100$$

9.- Cuando los cálculos demuestran que no existen momentos en ambos extremos de un miembro sujeto a compresión ó que las excentricidades resultantes en los extremos fuesen menores que $e_{mín} = (1,5 + 0,03h)$ cm. el valor del momento M_2 será $M_2 = P_u(1,5 + 0,03\ h)$ cm. alrededor de cada eje por separado. *(A. 10. 11. 5. 4.)*

10.- Si las excentricidades en los extremos son menores que las excentricidades mínimas, $e_{mín}$ se pueden utilizar los momentos calçulados para la relación M_1/M_2. *(A. 10. 11. 5. 4. a.)*

11.- Si en los cálculos se demuestra que sólo hay carga axial pura, la relación M_1/M_2 se tomará 1. *(A. 10. 11. 5. 4. b.)*

CONSIDERACIONES ESPECIALES PARA ∂ EN ESTRUCTURA CON POSIBILIDAD DE DESPLAZAMIENTO LATERAL RELATIVO ENTRE SUS APOYOS

12.- En estructura con posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos, el factor ∂ de amplificación de momentos se calculará para todo el entrepiso suponiendo que todas las columnas están cargadas. *(A. 10. 11.6. 1.)*

NOTA: Si una estructura puede desplazarse a nivel de entrepiso, es lógico pensar que este desplazamiento ocurre en todo el piso como una unidad, por lo tanto el momento secundario proveniente de ese movimiento debe relacionar a todos los miembros que componen el entrepiso, ya que el movimiento total es función de todos ellos, es decir; el factor de amplificación de momento será, igual para todo el piso, también es sano y conveniente para el caso particular de alguna columna muy cargada hacer su estudio por separado, como es lógico, esto queda sólo a juicio del proyectista. *(Nota del Autor)*

13.- Para estructuras con posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos el valor P_u y P_c se reemplazarán por ΣP_u y ΣP_c respectivamente del entrepiso. *(A. 10. 11. 6. 2.)*

14.- Para estructuras con posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos, el diseño de cada columna en particular y del entrepiso, se considerará como el mayor valor, de los siguientes:

1) El del entrepiso total, ó

2) El de la columna individualmente calculado como si no tuviera desplazamiento lateral. *(A. 10. 11. 6. 3.)*

15.- Para estructuras con posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos, los miembros que trabajan a flexión (vigas) se diseñarán para el momento amplificado $M' = \partial M$ que llega al nodo.

NOTA: Debe escogerse el mayor entre el actuante en la viga y el amplificado en el extremo de la o las columnas. *(Nota del Autor)*

16.- Para miembros sujetos a flexo-compresión biaxial, los momentos con respecto a cada eje se amplificarán por el factor ∂, calculado individualmente para cada eje. *(A. 10. 11. 7.)*

NOTA: Se debe considerar la columna independiente para cada eje en cuanto a P_c, K, L_u.. *(Nota del Autor)*

17.- Para obtener el factor K de longitud efectiva de miembros a compresión además de utilizarse los Nomogramas de Jackson y Moreland se puede recurrir a las siguientes expresiones:

a. Para estructuras sin posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos, al menor de los valores de K.

$$K \leq \left\{ \begin{array}{l} 0{,}70 + 0{,}005\,(\psi_A + \psi_B) < 1,0 \\ \\ 0{,}85 + 0{,}005\,\psi_{min} < 1{,}00 \end{array} \right\} \text{Donde } \psi_{min} \text{ es el menor de } \psi_A \text{ y } \psi_B$$

b. Para estructuras con posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos.

$$\left. \begin{array}{ll} K = \dfrac{20 - \psi}{20}\sqrt{1 + \psi} & \Rightarrow \text{Para } \psi < 2 \\ \\ K = 0{,}9\,\sqrt{1 + \psi} & \Rightarrow \text{Para } \psi > 2 \end{array} \right\} \text{Donde} \quad \psi = \frac{\psi_A + \psi_B}{2}$$

c.- Para miembros sin posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos y con un extremo articulado.

$K = 2 + 0{,}3\,\psi$ Donde ψ es el valor en el extremo empotrado

(C. 10. 11. 2.)

18.- Se pueden definir como miembro en compresión sin posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos si este miembro se encuentra ubicado en un entrepiso en el cual los elementos que pueden impedir el movimiento (tales como; muros cortantes, armadura de

corte o cualquier otro tipo de estructura arriostrante) tengan una rigidez total que sea capaz de resistir los movimientos laterales de la estructura en el piso cuando menos 6 veces la suma de las rigideces de todas las columnas del entrepiso.

Con esta proporción entre rigideces se genera una rigidez lateral en la estructura y el entrepiso, tal que la rigidez lateral del entrepiso será lo bastante conservadora o pequeña como para no afectar significativamente la resistencia de las columnas, sin embargo, la verdadera definición de estructura que pueden desplazarse o no, queda a juicio del proyectista según haya concebido la estructura. *(C. 10. 11. 2)*

19.- También se puede decir que una estructura no tiene posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre sus apoyos, si el índice de estabilidad Q es:

$$Q = \frac{P_u \, \Delta u}{H_u \, h_s} = \leq 0,4$$

Donde, P_u = Σ de los P_u en las columnas
Δ_u = Deflección lateral de primer orden calculada elásticamente con cargas mayoradas.
H_u = Fuerza horizontal mayorada en el entrepiso.
h_s = Altura del entrepiso.

Siempre que los momentos secundarios ΔM no sobrepasen en 5% a los momentos de primer orden M. *(C. 10. 11. 2.)*

20.- Para los factores $\psi = \dfrac{\Sigma\left(\dfrac{EI}{L}\right)_{columnas}}{\Sigma\left(\dfrac{EI}{L}\right)_{vigas}}$

El valor EI se obtendrá de aplicar la ecuación:

$$EI = \frac{E_c \, I_g}{5} + E_s \, I_s$$ ó la expresión simplificada

$$EI = \frac{E_c \, I_g}{2,5}$$ es decir con $\beta d = 0$ *(C. 10. 11. 2.)*

4.7 PROBLEMAS RESUELTOS DE ESBELTEZ

4.7.1 EJERCICIO Nº 1

Diseñar una columna que pertenece a una estructura que no tiene desplazamiento lateral, ver Fig. 4.11 y el análisis de primer orden generó momentos como los indicados en la Fig. 4.12.

$f'c = 210$ K/cm² $fy = 4.200$ K/cm² $\beta d = 0,25$

$e'_{mín} = 15 + 0,03\,h = 1,5 + 0,03 \times 60 = 3,3$ cm. => $e_{mín} = 0,033$ m.

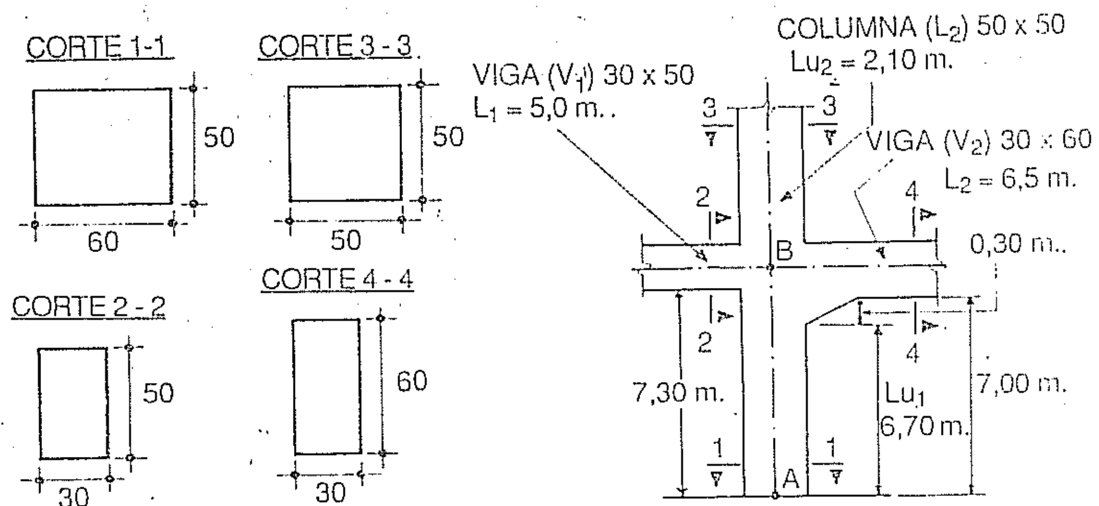


Figura 4.11

Se chequean las excentricidades en cada extremo

$$e_A = \frac{M_A}{Pu} = \frac{43}{500} = 0,09 \text{ m.} > e_{mín}$$

$$e_B = \frac{Mb}{Pu} = \frac{50}{500} = 0,10 \text{ m.} > e_{mín}$$

Se asume columna de las siguientes dimensiones.

$$A_c = \frac{Pu}{0,45\,f'c} = \frac{300.000}{0,45 \times 210} = 3.174 \text{ cm}^2 \Rightarrow \begin{cases} b = 50 \text{ cm.} \\ h = 60 \text{ cm.} \end{cases}$$

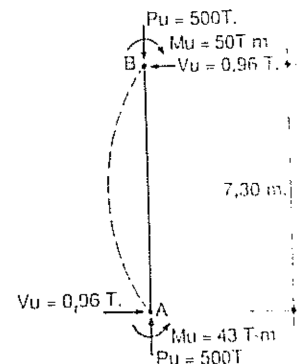


Figura 4.12

Obtención de factor de longitud efectiva K.

Determinación de las inercias de los miembros

$$I_{c1} = \frac{50 \times 60^3}{12} = 900.000 \text{ cm}^4$$

$$I_{c2} = \frac{50 \times 50^3}{12} = 520.833 \text{ cm}^4$$

$$I_{vs} = \frac{30 \times 50^3}{12} = 312.500 \text{ cm}^2$$

$$I_{vi} = \frac{30 \times 60^3}{12} = 540.000 \text{ cm}^2$$

Determinación de los valores ψ en los nodos ψ_A y ψ_B

$\psi_A = 0$ Por ser empotramiento en el nodo A

$$\psi_B = \frac{\Sigma\left(\frac{EI}{Lu}\right)_{col\ B}}{\Sigma\left(\frac{EI}{L}\right)_{vig\ B}}$$

Como $EI = \frac{Ec\ Ig}{2,5}$ los valores de Ec y 2,5 son constantes, por lo tanto se anulan, entonces:

$$\psi_B = \frac{\Sigma\left(\frac{EI}{Lu}\right)_{col\ B}}{\Sigma\left(\frac{EI}{L}\right)_{vig\ B}} = \frac{\frac{I_{c1}}{L_{u1}} + \frac{I_{c1}}{L_{u2}}}{\frac{I_{v1}}{L_{v1}} + \frac{I_{v2}}{L_2}} = \frac{\frac{900.000}{670} + \frac{520.833}{210}}{\frac{312.500}{500} + \frac{540.000}{650}} = 2,626$$

Determinación del factor de longitud efectiva K por fórmula.

$\psi_{mín} = \psi_A = 0$

$$K \leq \left\{ \begin{array}{l} 0,70 + 0,005\ (\psi_A + \psi_B) = 0,70 + 0,005 \times 2,626 = 0,713 \\ \\ 0,85 + 0,05\ \psi_{mín} = 0,85 + 0,05 \times 0 = 0,85 \end{array} \right\} K = 0,713$$

Determinación del factor de longitud efectiva K por Nomogramas de Jackson y Moreland.

$\psi_A = 0$ Por ser empotramiento
$\psi_B = 2{,}262$ } => Se obtiene K = 0,70

Como se ve los valores obtenidos de K son parecidos, en este caso se toma mayor K = 0,713 y se comprueba si tiene esbeltez de acuerdo a las normas

Se determina radio de giro.
r = 0,3 h = 0,30 x 60 = 18 cm. => Radio de giro = r = 18 cm.

Chequeando relación de esbeltez λ y teniendo en cuenta que no hay desp zabilidad.

$$\lambda = \frac{KLu}{r} = \frac{0{,}713 \times 670}{18} = 26{,}54 > 34 - 12\,\frac{M_1}{M_2} = 34 - 12\,\frac{43}{50} = 23{,}68$$

Como $\lambda = \dfrac{KLu}{r} = 26{,}54 > 23{,}68$ => Según las normas es columna esbelta.

Determinación del factor Cm teniendo en cuenta que hay curvatura si ple, donde M_1 = 43 T-m y M_2 = 50 T-m.

$$Cm = 0{,}6 + 0{,}4\,\frac{M_1}{M_2} > 0{,}4 \Rightarrow Cm = 0{,}6 + 0{,}4\,\frac{43}{50} = 0{,}944 > 0{,}4$$

Determinación de la carga crítica $P_c = \dfrac{\pi^2 EI}{(KLu)^2}$

$$EI = \frac{Ec\,Ig}{2{,}5(1 + \beta d)} = \frac{15.000\sqrt{210} \times 900.000}{2{,}5(1 + 0{,}25)} = 6{,}26 \times 10^{10}\ \text{K-cm}^2$$

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 6{,}26 \times 10^{10}}{(0{,}713 \times 670)^2} = 2.704.611\ \text{Kg.}$$

Cálculo de el Factor de Amplificación de momentos ∂

$$\partial = \frac{Cm}{1 - \dfrac{Pu}{\emptyset Pc}} = \frac{0{,}944}{1 - \dfrac{300.000}{0{,}7 \times 2.704.611}} = 1{,}122 > 1$$

Conocido el factor ∂ se determinan las solicitaciones de diseño.

$Pu = 300\ T$ y $M' = \partial Mu = 1{,}122 \times 50\ \text{T-m} = 56{,}1\ \text{T-m}$

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, T blas y Gráficas pág. 60, con los parámetros:

$\gamma \quad = 0{,}9$

$K \quad = \dfrac{300.000}{210 \times 50 \times 60} = 0{,}476$ => Se obtiene $p_t = 0{,}022$

$K\dfrac{e}{h} = 0{,}476 \times \dfrac{1}{60} = 0{,}132$

El área de acero requerido para la columna esbelta.
$A_{st} = p_t bh = 0{,}022 \Rightarrow A_{st} = 0{,}022 \times 50 \times 60 = 66\ cm^2$

4.7.2 EJERCICIO Nº 2

Diseñar la columna 3B del 1er piso de la estructura mostradas en la Fig. 4.13, en la cual se detallan las dimensiones de los elementos, concreto $f'c = 210\ K/cm^2$ y acero $fy = 4.200\ K/cm^2$, el valor de $\beta d = 0{,}21$ todas las vigas son iguales en dimensiones.
Solicitaciones : $P_u = 150T.$, $M_A = 25$ T-m y $M_B = 19{,}75$ T-m

Figura 4.13

$e_{mín} = 1{,}5 + 0{,}03\ h = 1{,}5 + 0{,}03 \times 45 = 2{,}85$ cm. => $e_{mín} = 0{,}0285$ m.
Se determinan las excentricidades existentes en cada extremo A y B de la columna.

$e_A = \dfrac{M_A}{P_u} = \dfrac{25}{150} \quad = 0{,}167\ m > e_{mín}$

$$e_B = \frac{M_B}{P_u} = \frac{19{,}75}{150} = 0{,}132 \text{ m} > e_{min}$$

Como todas las columnas del 1er. piso son iguales en dimensiones, se asume que la carga crítica P_c es igual para todas las columnas del piso, también se asume que la P_u en todas las columnas del piso es igual ya que no hay mas datos.

$$I_{c1} = \frac{40 \times 50^3}{12} = 416.667 \text{ cm}^4$$

$$I_{c2} = \frac{40 \times 45^3}{12} = 303.750 \text{ cm}^4$$

$$I_v = I_{v1} = I_{v2} = I_{v3} = I_{v4} = \frac{25 \times 45^3}{12} = 189.844 \text{ cm}^4$$

$$\psi_A = \frac{\Sigma\left(\frac{I}{L}\right)_{col\ A}}{\Sigma\left(\frac{I}{L}\right)_{vig\ A}} = \frac{\frac{I_{c1}}{L_{c1}} + \frac{I_{c2}}{L_{c2}}}{\frac{I_{v1}}{L_1} + \frac{I_{v2}}{L_2}} = \frac{\frac{416.667}{310} + \frac{303.750}{310}}{2 \times \frac{189.844}{500}} = 3{,}06$$

$$\psi_B = \frac{\Sigma\left(\frac{I}{L}\right)_{col\ B}}{\Sigma\left(\frac{I}{L}\right)_{vig\ B}} = \frac{\frac{I_{c2}}{L_{c2}} + \frac{I_{c3}}{L_{c3}}}{\frac{I_{v3}}{L_3} + \frac{I_{v4}}{L_4}} = \frac{\frac{2 \times 303.750}{310}}{2 \times \frac{189.844}{500}} = 3{,}58$$

Determinación del factor de longitud efectiva K por fórmulas

$$\psi = \frac{\psi_A + \psi_B}{2} = \frac{3{,}06 + 2{,}58}{2} = 2{,}82$$

$$K = 0{,}9\sqrt{1 + \psi} = 0{,}9\sqrt{1 + 2{,}82} = 1{,}76$$

Determinación del factor de longitud efectiva K por Nomogramas de Jackson y Moreland.

$$\left.\begin{array}{l} \psi_A = 3{,}06 \\ \psi_B = 2{,}58 \end{array}\right\} \Rightarrow K = 1{,}78$$

Se determina el radio de giro $r = 0{,}3\ h = 0{,}3 \times 45 = 13{,}5$ cm.

Chequeando la relación de esbeltez λ y teniendo en cuenta que hay desplazabilidad.

$$\lambda = \frac{KLu}{r} = \frac{1{,}76 \times 310}{13{,}5} = 40{,}41 > 22$$ => Según normas es columna esbelta.

En este caso el valor $C_m = 1$

Determinación del la carga crítica $P_c = \dfrac{\pi^2 EI}{(K\,Lu)^2}$

$$EI = \frac{Ec\ Ig}{2{,}5(1 + \beta d)} = \frac{15.000\sqrt{210} \times 303.750}{2{,}5(1 + 0{,}21)} = 2{,}18 \times 10^{10}\ \text{K-cm}^2$$

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 2{,}182 \times 10^{10}}{(1{,}76 \times 310)^2} = 723.677\ \text{Kg.}$$

Cálculo del factor de amplificación de momentos ∂

$$\partial = \frac{C_m}{1 - \dfrac{P_u}{\varnothing P_c}} = \frac{1}{1 - \dfrac{12 \times 150.000}{0{,}7 \times 12 \times 723.677}} = 1{,}42$$

Conocido el factor ∂ se determinan las solicitaciones de diseño.
$P_u = 150$ T. y $M\acute{u} = \partial M_u = 1{,}42 \times 25 = 35{,}5$ T-m

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Tablas y Gráficas pág. 59, con los parámetros γ, K y Ke/h

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= 0{,}8 \\ K &= \frac{150.000}{210 \times 40 \times 45} = 0{,}397 \\ K\frac{e}{h} &= 0{,}397 \times \frac{35{,}5}{150} \times \frac{1}{0{,}45} = 0{,}209 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Se obtiene } p_t = 0{,}041$$

El área de acero requerida para la columna esbelta.
$Ast = pt\ bh = 0{,}41 \times 40 \times 45 = 73{,}8\ \text{cm}^2$

4.7.3 EJERCICIO Nº 3
Para una columna que se encuentra solicitada a flexo-compresión biaxial, se desea conocer las nuevas solicitaciones de diseño, si la columna es esbelta en las dos direcciones, sección de 45 x 60 como se muestra en la Fig. 4.14, utilizar recubrimiento r = 5 cm.

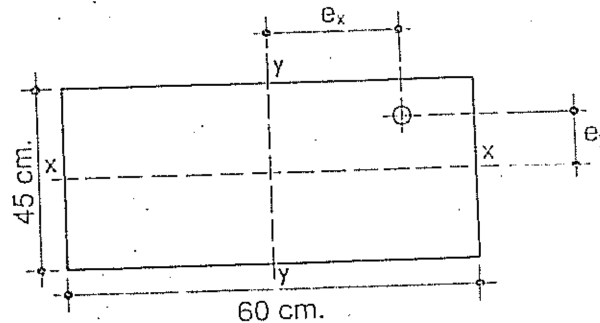


Figura 4.14

Solicitaciones y parámetros para el diseño

$P_u = 200$ T	$f'_c = 210$ K/cm²	$f_y = 4.200$ K/cm²	$\beta d = 0,30$
$M_{ux} = 30$ T-m	$L_{ux} = 4,00$ m.	$K_x = 1,25$	$\gamma_x = 0,83$
$M_{uy} = 19$ T-m	$L_{uy} = 3,70$ m.	$K_y = 1,13$	$\gamma_y = 0,78$

Estudio en la dirección X

$C_{mx} = 1$ => Por ser estructura con desplazabilidad en la dirección X

Radio de giro en X => $r_x = 0,3\ h = 0,30 \times 60 = 18$ cm.

$$\lambda_x = \left(\frac{KLu}{r}\right)_x = \frac{1,25 \times 400}{18} = 27,78 > 22$$ => Es columna esbelta en dirección X

Carga Crítica en X

$$I_{gx} = \frac{45 \times 60^3}{12} = 810.000 \text{ cm}^4$$

$$(EI)_x = \frac{EcIg}{2,5(1 + \beta d)} = \frac{15.000\sqrt{210} \times 810.000}{2,5(1 + 0,30)} = 5,417 \times 10^{10} \text{ K-cm}^2$$

$$P_{cx} = \frac{\pi^2 (EI)_x}{(KLu)_x^2} = \frac{\pi^2 \times 5,417 \times 10^{10}}{(1,25 \times 400)^2} = 2.138.771 \text{ Kg}$$

Factor de amplificación en X, ∂x

$$\partial x = \frac{C_{mx}}{1 - \frac{P_u}{\varnothing P_{cx}}} = \frac{1}{1 - \frac{200.000}{0,7 \times 2.138.771}} = 1,15$$

Estudio en la dirección Y

$C_{my} = 1$ => Por ser estructura con desplazabilidad en Y

Radio de giro en Y => $r_y \approx 0,3\ b = 0,30 \times 45 = 13,5$ cm

$$\lambda_x = \left(\frac{Klu}{r}\right)_y = \frac{1,13 \times 370}{13,5} = 30,97 > 22$$ => És columna esbelta en dirección Y

Carga Crítica en Y

$$I_{gy} = \frac{60 \times 45^3}{12} = 455.625 \text{ cm}^4$$

$$(EI)_y = \frac{EcIg}{2,5(1 + \beta d)} = \frac{15.000\sqrt{210} \times 455.625}{2,5(1 + 0,30)} = 3,047 \times 10^{10} \text{ K-cm}^2$$

$$P_{cy} = \frac{\pi^2 (EI)_y}{(KLu)_y^2} = \frac{\pi^2 \times 3047 \times 10^{10}}{(1,13 \times 370)^2} = 1.720.547 \text{ Kg.}$$

Factor de amplificación en Y, ∂y

$$\partial y = \frac{C_{my}}{1 - \frac{P_u}{\varnothing P_{cy}}} = \frac{1}{1 - \frac{200\ 000}{0,7 \times 1.720.547}} = 1,20$$

Conocidos los factores ∂x y ∂y se determinan las solicitaciones de diseño

$P_u = 200$ T

$M'ux = \partial x\ M_{ux} = 1,15 \times 30 = 34,50$ T-m

$M'uy = \partial y\ M_{uy} = 1,10 \times 19 = 22,80$ T-m

El diseño se realiza como en los casos de flexo-compresión biaxial, lo cual se puede ver en los problemas correspondientes al Capítulo III.

CAPITULO V

Corte y Juntas Vigas-Columnas

5.1 INTRODUCCION

Referirse a esfuerzos cortantes en columnas sin relacionarlos con la flexión es entrar posiblemente en cosideraciones teóricas, es por eso que las normas relacionan los dos efectos simultáneamente, obligando al diseño por corte en las columnas y haciendo especial atención a las juntas vigas-columnas, las cuales merecen especial atención y consideración, ya que al final son los que reciben los esfuerzos mayores provenientes de los cargas de la estructura.

Se puede decir que todo elemento estructural que esté sometido a los efectos de flexión y cargas axiales, sean éstas de comprensión o tensión, no escapa de los efectos de las fuerzas cortantes, las cuales en raras ocasiones se consideran que actúan solas y si éste fuera el caso, se hace necesario estudiar la interacción entre éstas fuerzas de corte y las otras actuantes de la estructura y su efecto sobre elementos vecinos.

El diseño por corte lleva especial interés en diseñar la sección para falla dúctil, implicando ésto que nunca debe ocurrir fallas por corte en una sección.

5.2 INTERACCION FLEXION-CARGA AXIAL-CORTANTE

El efecto sísmico sobre las estructuras genera en ocasiones fuerzas axiales de tensión sobre las columnas, sin embargo, lo usual es pensar en columnas trabajando a comprensión, por eso las normas permiten el diseño para corte con comprensión axial y corte con tensión axial.

5.2.1 CORTE Y COMPRESION AXIAL

Como es conocido por todo proyectista el esfuerzo cortante está asociado con el fenómeno de la tensión diagonal, por lo tanto, el mismo fenómeno con efecto de carga axial a comprensión aumenta la capacidad de resistir al corte a los miembros de concreto armado.
Es decir, en un miembro de concreto armado bajo el efecto de carga axial a compresión la capacidad de absorción al corte se ve incrementada respecto a la capacidad de absorción a corte por agrietamiento diagonal.

La fuerza cortante máxima permitida en el concreto se expresa como:

$$V_{cu} = \left(0{,}5\sqrt{f'_c} + 1.408\,\frac{V_u}{M_u - N_u\,(4h - d)} \right) bd \leq \left(0{,}93\sqrt{f'_c}\sqrt{1 + \frac{N_u}{35\,A_g}} \right) b\,d$$

(A. 11. 3. 2. 2.)

Se puede usar en forma conservadora $V_{cu} = 0{,}53\sqrt{f'_c}\; b\,d$

5.2.2 CORTE Y TENSION AXIAL

Al igual que el caso anterior, la carga axial a tensión tiene efecto sobre la capacidad de absorción del corte, la carga axial a tensión disminuye la capacidad de absorción del corte.

La fuerza cortante máxima permitida en el concreto se expresa como:

$$V_{cu} = 0{,}53\sqrt{f'_c}\left(1 - \frac{N_u}{35\,A_g}\right) b\,d \qquad (A.\ 11.\ 3.\ 2.\ 3.)$$

En caso de resultar menor que cero, la armadura de corte o ligaduras se diseñarán para resistir las fuerzas de corte total sin contribución del concreto. *(A. 11. 2. 3.)*

5.3 ALCANCE DE LA CONTRIBUCION DEL CONCRETO

En cualquier caso la contribución del concreto se considera nula si la carga axial mayorada del diseño incluyendo el sismo, es menor que $0{,}05\,A_g\,f'_c$. *(A. 18. 3. 4. 6.)*

5.3.1 REQUISITOS DE DUCTILIDAD AL CORTE

Las normas exigen como requisitos anti-sísmicos que en los extremos de las columnas sean confinados sus núcleos mediante acero de refuerzo transversal ya sean en forma de zunchos o ligaduras, si la carga axial máxima de diseño P_u es mayor de $0{,}1\,f'_c\,A_g$.

Por lo tanto, si $P_u \geq 0{,}1\ f'_c\ A_g$ =>Se requiere confinamiento *(A. 18. 3. 2. 1.)*
Con un área de acero a colocar nunca menor que el mayor de los siguientes valores:

$$A_s \geq \begin{cases} 0{,}3\dfrac{f'_c}{f_y}\left(\dfrac{A_g}{A_n} - 1\right)h'\,S \\[2ex] 0{,}12\dfrac{f'_c}{f_y}\,h'S & \textit{(A. 18. 3. 4. 3. 1.)} \\[2ex] \dfrac{V_{su}\,S}{0{,}85\ f_y\ d} & \textit{(A. 11. 4. 6. 2.)} \end{cases}$$

Donde, V_{su} = Corte último en el acero = $V_u - V_{uc}$

d = Altura útil.

h = Dimesión transversal centro a centro de ligadura.

S = Separación vertical de las ligaduras.

El área de acero se refiere a una dirección, por lo tanto, se requiere el cálculo en las dos direcciones de los ejes principales, ver Fig. 5.1.

Se permiten usar como refuerzo transversal ligaduras de una o más ramas, abiertas, cerradas o múltiples, y cada extremo deberá abrazar por lo menos una cabilla longitudinal, ver Fig. 5.1.

(A 18. 3. 4. 3.)

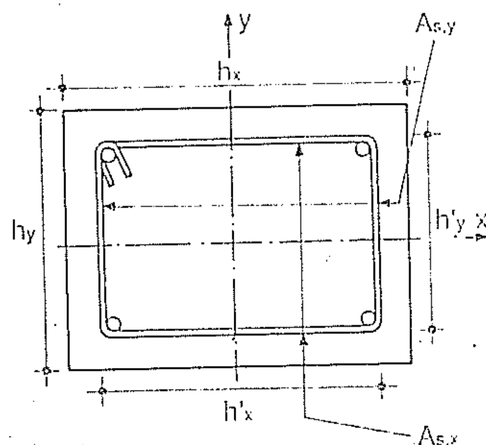


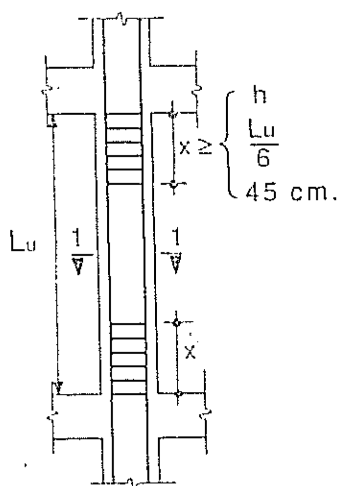
Figura 5.1

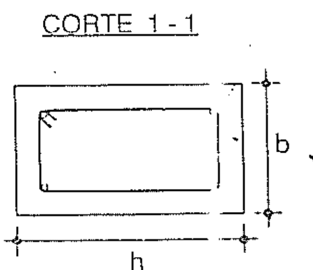
La ductibilidad se asegura confinando con el refuerzo indicado los extremos de las columnas en una longitud por lo menos igual al mayor de los siguientes valores:

a.- La mayor dimensión de la sección transversal.

b.- 1/6 de la altura libre del miembro.

c.- 45 cm., ver Fig. 5.2. *(A. 18. 3. 4. 2. 11.)*





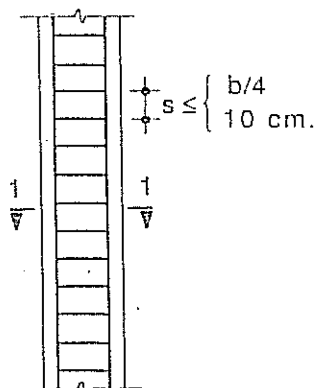


Figura 5.2

Figura 5.3

Y a separación S nunca mayor que el menor de los siguientes valores:

a.- 1/4 de la menor dimensión de la sección transversal

b.- 10 cm., ver Fig. 5.3. *(A. 18. 3. 4. 4.)*

Además la separación máxima en el plano de la sección entre cada rama de ligadura sea de una rama o múltiples, nunca será mayor de 35 cm., ver Fig. 5.4. *(A. 18. 3. 4. 4.)*

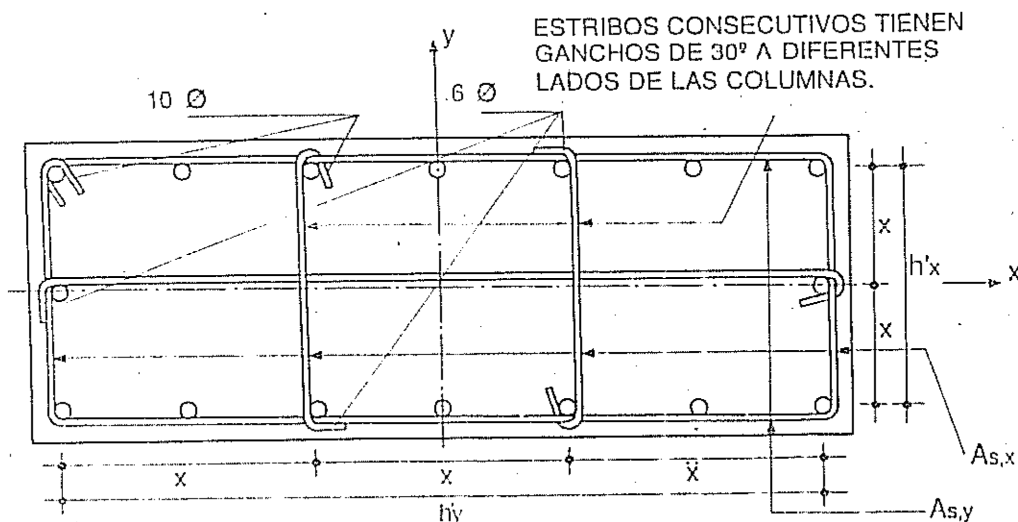


Figura 5.4

5.4 DETERMINACION DE LA FUERZA CORTANTE DE DISEÑO

En una columna sin cargas laterales entre sus apoyos y que esté solicitada simultáneamente por los efectos de flexión y carga axial, la fuerza cortante de diseño podrá ser el menor valor que se obtenga por alguno de los dos procedimientos siguientes: *(A. 18. 3. 4. 5.)*

Procedimiento 1. Dividiendo la suma de los valores absolutos de los momentos nominales en los extremos de la columna entre la longitud libre Lu de la columna.

En este caso momento nominal se define como $M_n = \dfrac{M_u}{\varnothing}$, ver Fig. 5.5.

Donde, M_u = Momento último resistente para la carga axial mayorada.

$\varnothing = 0{,}70$

Por lo tanto, el corte se define como $V_u = \dfrac{M_{uA} + M_{uB}}{0{,}7\ L_u}$

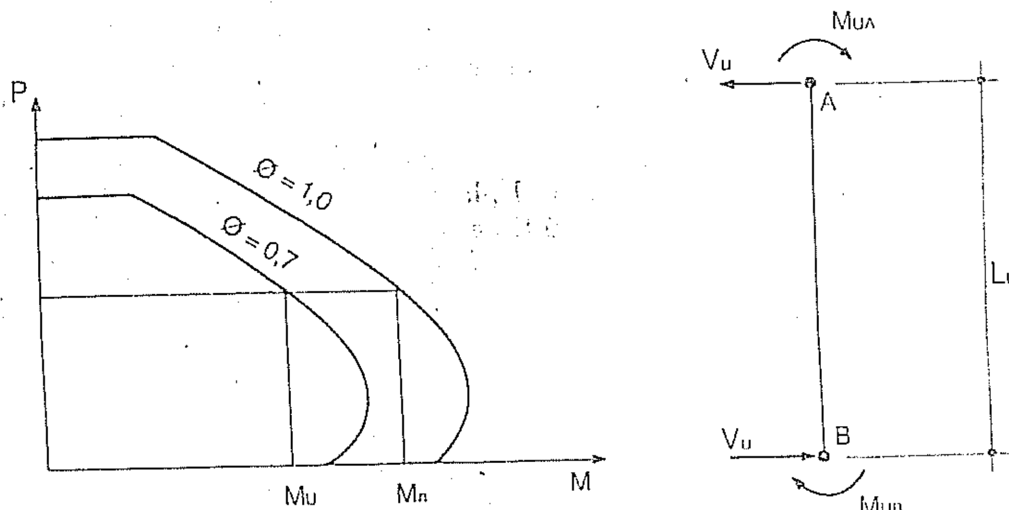


Figura 5.5

Procedimiento 2. Tomando el doble del corte originado por el sismo resultante del análisis elástico lineal y sumándole los cortes provenientes de cualquier otras solicitaciones debidamente mayoradas , $V_u = 2\ V_{sismo} + V_u'$

Excepciones al Procedimiento 2

a.- Cuando en las columnas del último piso no se cumpla que $M_{u_{col}}/M_{u_{vig}} < 1{,}2$ entonces se utilizará el Procedimiento 1.

b.- Para las columnas del primer piso el corte de diseño del Procedimiento 2 no será menor que el calculado de dividir la suma del momento nominal en la base de la columna más el doble del momento resultante del análisis elástico lineal en la parte superior entre la longitud libre Lu de la columna.

$$V_u = 2\,V_{sismo} + V_u' \geq \frac{\frac{M_u}{0{,}7} + 2\,M_{uA}}{L_u}$$

Donde, M_u = Momento último resistente para la carga axial mayorada mayorada de diseño P_u.

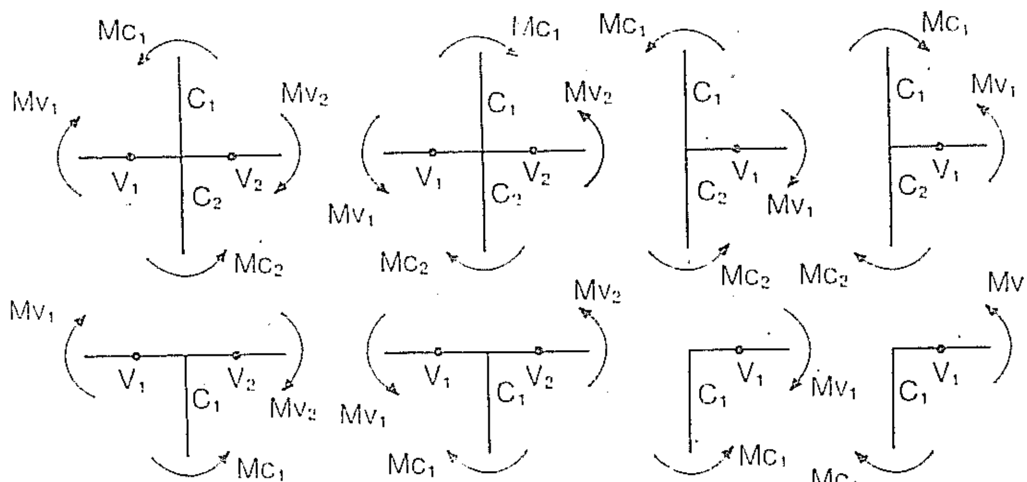
M_{uA} = Momento actuante en el extremo superior A.

V_u' = Corte actuante mayor en la columna.

V_{sismo} = Corte actuante por sismo mayor en la columna.

5.5 REQUISITO DE RESISTENCIA A FLEXION DEL NODO

La norma exige que en cualquier nodo y en el mismo plano donde las columnas que concurren a éste resistan una carga axial mayorada a compresión P_u que sea mayor que $0{,}1\,A_g f_c'$, la suma de las resistencias a flexión de las columnas calculadas para la fuerza axial de diseño mas desfavorable debe ser mayor que 1,20 veces la suma de las resistencias a flexión de las vigas concurrentes a ese nodo y en el plano.
La resistencia a flexión se deberá sumar en tal forma que los momentos de las columnas se opongan a los momentos de las vigas, y esta verificación se deberá hacer en ambos sentidos del plano vertical considerado, tal como se indica en la Fig. 5.6.



MOMENTOS EN COLUMNAS CUANDO EN LAS VIGAS SE FORMAN ARTICULACIONES PLASTICAS

Figura 5.6

En este caso la carga axial de diseño más desfavorable se considera la carga axial en su plano y los momentos de las vigas se calcularán con factor Ø= 0,9 y esfuerzo cedente fy.

El criterio de alcance de esta norma es obligar a la formación de articulaciones plásticas en las vigas antes que en las columnas.

5.6 JUNTAS VIGAS-COLUMNAS

La junta de las vigas y columnas que convergen en un plano deberán diseñarse para resistir el corte que éstos elementos vigas y columnas les transmiten, por lo tanto, requerirán de un refuerzo de acero transversal y en la dirección del corte que se origina en el plano. *(A. 18. 3. 5. 4.)*

5.6.1 REQUISITOS DE DUCTILIDAD EN JUNTAS VIGAS-COLUMNAS

Dentro de una junta viga-columna se requiere como requisito que el área de acero transversal nunca sea menor que el mayor de los siguientes valores:

$$A_s = \begin{cases} 0{,}3\dfrac{f'_c}{f_y}\left(\dfrac{A_g}{A_n} - 1\right)h'S \\ 0{,}12\dfrac{f'_c}{f_y}\,h'S \\ \dfrac{V_{su}\,S}{0{,}85 f_y\,h_j} \end{cases}$$

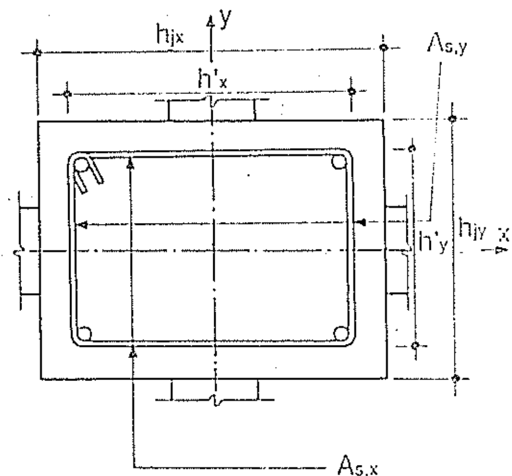


Figura 5.7

Donde, V_{su} = Corte en último en el acero = $V_j - V_{cv}$

h' = Dimensión transversal centro a centro de ligadura.

h_j = Altura de la junta en dirección del corte.

S = Separación vertical de ligaduras.

V_j = Corte en la junta (ver más adelante).

NOTA: En una junta de viga–columna se considera d=h.

El area de acero As, se refiere a una dirección, por lo tanto, se requiere el cálculo en las dos direcciones de los ejes principales, ver Fig 5.7.

La separación S nunca será mayor que el menor de los siguientes valores:

a.- 1/4 de la menor dimensión de la junta bj.

b.- 10 cm., ver Fig. 5.8.

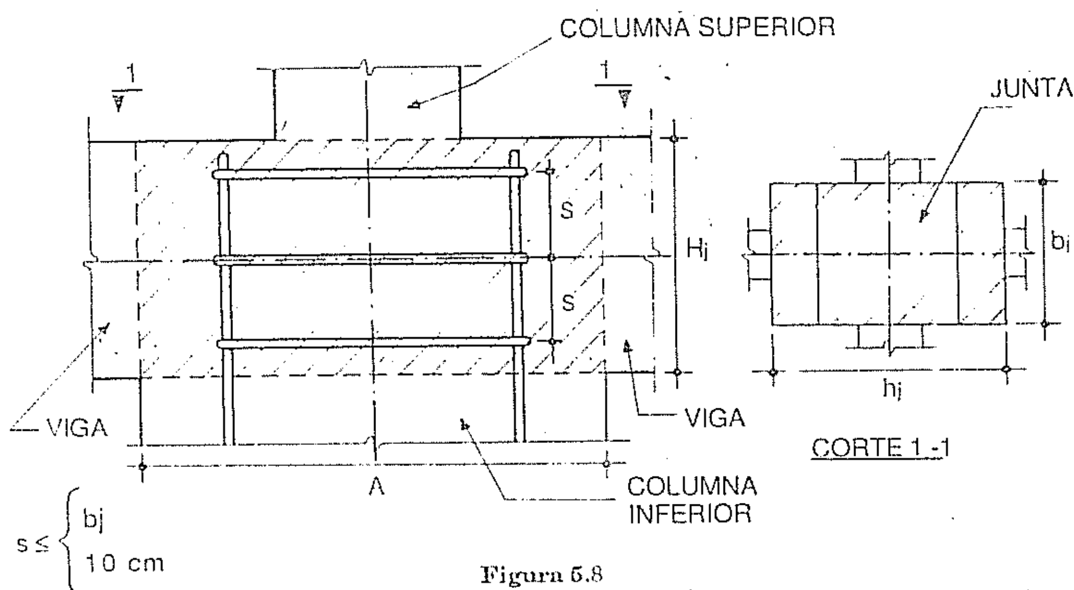


Figura 5.8

5.6.2 JUNTAS CONFINADAS Y REDUCCION DEL ACERO TRANSVERSAL

Las juntas vigas-columnas por lo general se encuentran confinadas total o parcialmente y dependiendo del grado de confinamiento se permite la reducción en un 50% del área de acero transversal del procedimiento anterior, si la junta está confinada por vigas concurrentes en sus cuatro lados y donde el ancho de cada una de ellas es por lo menos igual al 75% del ancho de la junta y la separación S no será mayor de 15 cm. y en una longitud igual a la menor altura de las vigas concurrentes, ver Fig. 5.9.

(A. 18. 4. 2. 2.)

5.6.3 FUERZA CORTANTE EN JUNTA VIGA - COLUMNA METODO ANALITICO.

La fuerza cortante actuante en la junta viga-columna se define como:

$V_j = 1{,}25\ f_y\ (A_{s,V_{izq}} + A_{s,V_{der}}) - V_{col}$, ver Fig. 5.10.

Donde, $$V_{col} = \frac{2\left(\frac{L_{V_{izq}}}{L_{V'_{izq}}} M_{V_{izq}} + \frac{L_{V_{der}}}{L_{V'_{der}}} M_{V_{der}}\right)}{L_{C_{sup}} + L_{C_{inf}}}$$ *(C. 18. 4. 3.)*

Lv_{izq} = Luz eje a eje de la viga de la izquierda.
Lv'_{izq} = Luz libre de la viga de la izquierda.
Lv_{der} = Luz eje a eje de la viga de la derecha.
Lv'_{der} = Luz libre de la viga de la derecha.
Mv_{izq} = Momento nominal Mu/0,9 actuante calculado a 1,25 fy en la viga de la izquierda= 1,25 Asfy 7/8 d.
Mv_{der} = Momento nominal Mu/0,9 actuante calculado a 1,25 fy en la viga de la derecha =1,25 Asfy 7/8 d.
Lc_{sup} = Longitud eje a eje de la columna superior.
Lc_{inf} = Longitud eje a eje de la columna inferior.

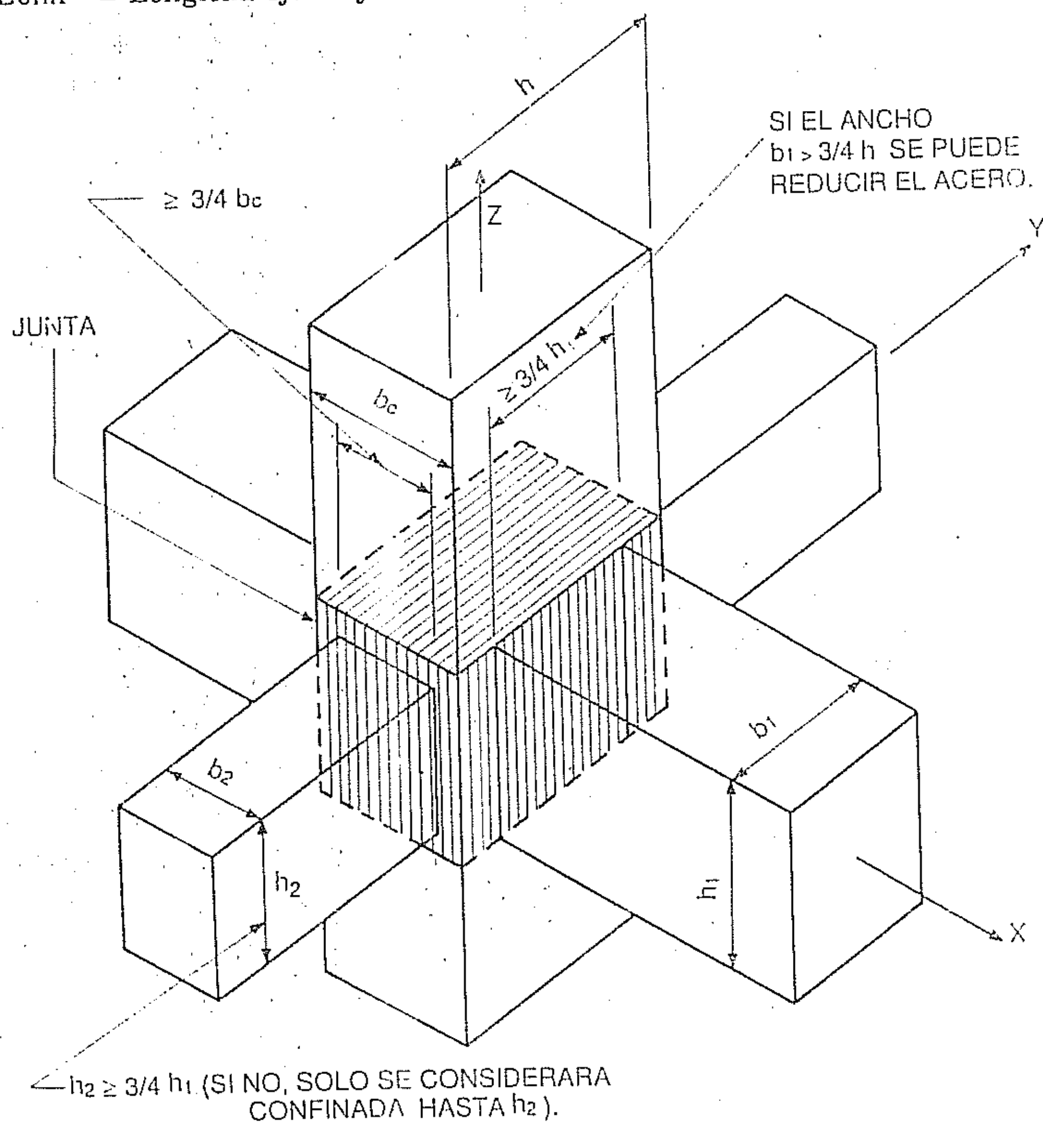


Figura 5.9

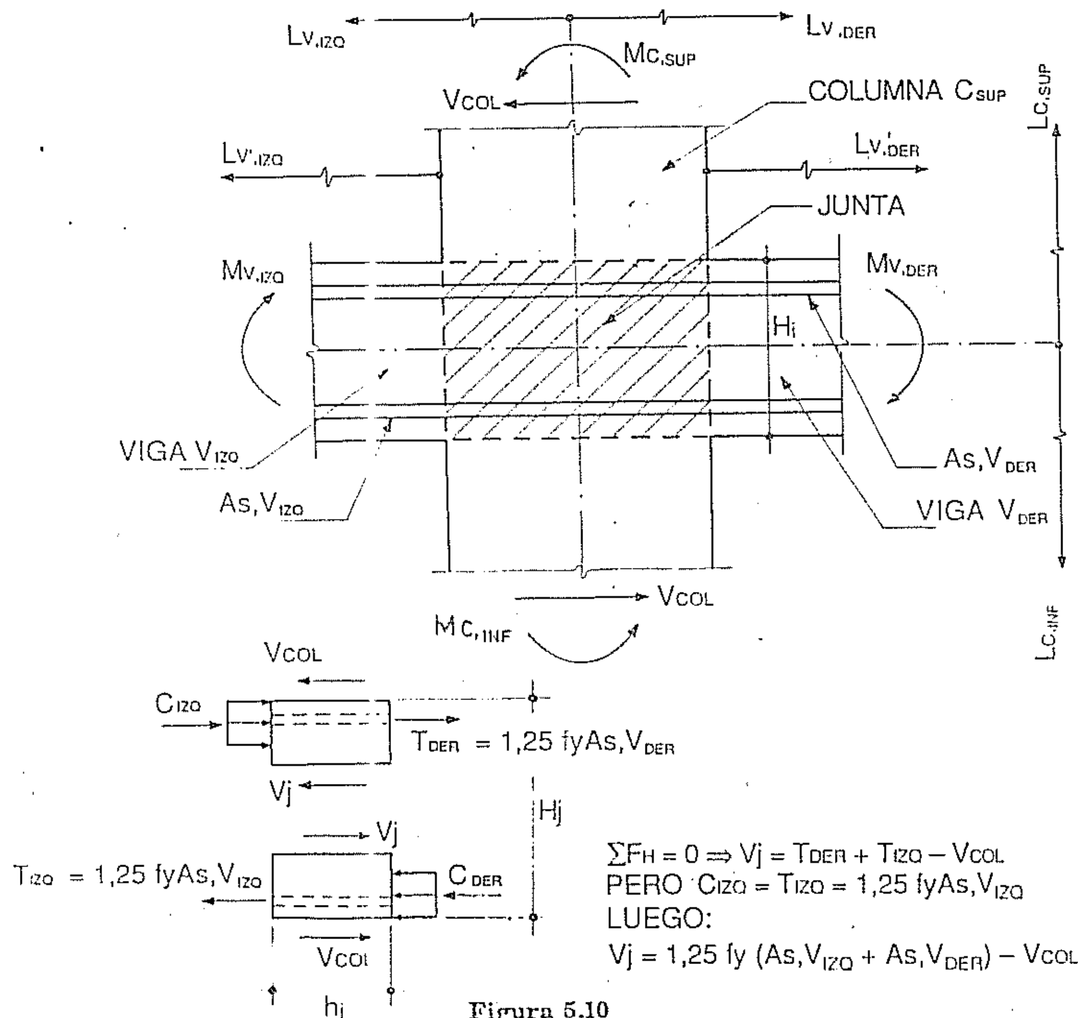


Figura 5.10

5.6.4 FUERZA CORTANTE EN JUNTA VIGA-COLUMNA METODO SIMPLIFICADO

En los casos donde se cumplan las relaciones siguientes (correspondiente a los casos mas comunes en estructuras convencionales), ver Fig. 5.11.

$\frac{h}{L_{v2}} \geq 0{,}08$ Donde, h' = Dimensión transversal del núcleo en el plano

L_{v2} = Mayor longitud eje a eje de viga que llega a la junta

$\frac{L_{v1}}{L_{v2}} \geq 0{,}70$ Donde, L_{v1} = Menor longitud eje a eje de viga que llega a la junta

L_{v2} = Mayor longitud eje a eje de viga que llega a la columna

Entonces se permite determinar la fuerza cortante en la junta, de una forma conservadora de la siguiente expresión:

$$V_j = 1{,}25\ f_y\ (A_{s,vizq} + A_{s,vder})\left(1 - \frac{2h_j}{L_{v1} + L_{v2}}\right)$$

(C. 18. 4. 3)

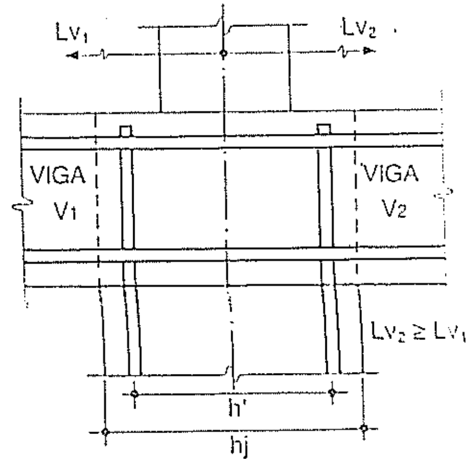


Figura 5.11

5.6.5 MAXIMA FUERZA CORTANTE EN JUNTA VIGA-COLUMNA

Los ensayos de juntas han demostrado que la capacidad resistente al corte no es tan sensible al refuerzo transversal, se ha adoptado la expresión para vigas del esfuerzo cortante máximo permitido.

$$v_{máx} = v_{su} + v_{cu} = \varnothing 2{,}1\ \sqrt{f_c'} + \varnothing\ 0{,}53\sqrt{f_c'} = \varnothing\ 2{,}63\sqrt{f_c'}$$

Tomando en cuenta la capacidad de resistencia al corte de un miembro confinado, en este caso, la junta se ha tomado la siguiente expresión:

$$V_{jmáx} = F\ v_{máx}\ A_j = \varnothing\ \ F\ \ 2{,}63\sqrt{f_c'}\ \ A_j = \varnothing\ \gamma\ \sqrt{f_c'}\ \ A_j$$

Donde, $\varnothing = 0{,}85$

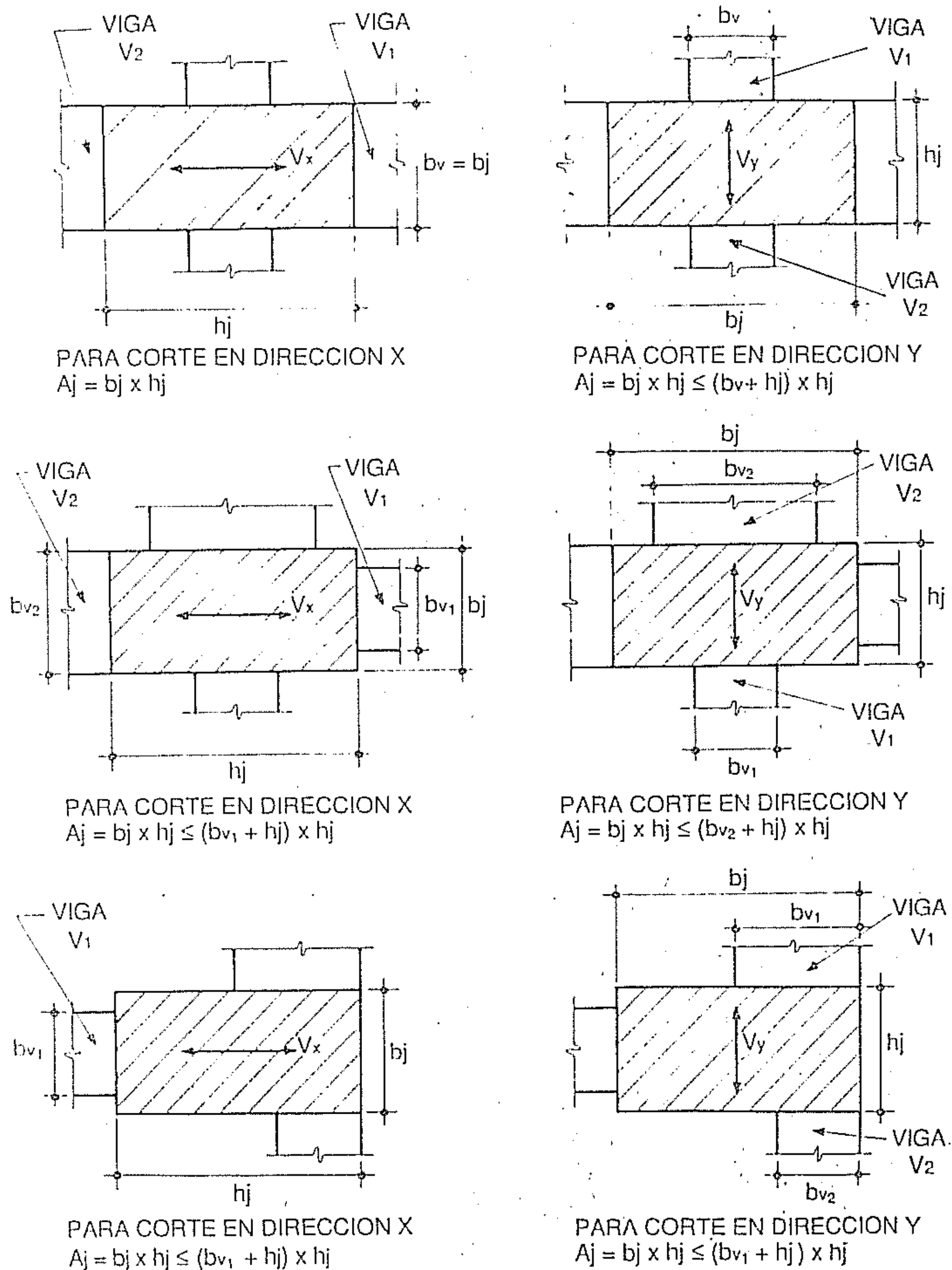
$\gamma = 2{,}63\ F \Rightarrow \gamma = 5{,}3$ En juntas confinadas, ver punto 5.6.

$\gamma = 4{,}0$ En juntas no confinadas.

A_j = Area de la junta $= b_j \times h_j \leq (b_v + h_j)\ h_j$, ver Fig. 5.12.

Por lo tanto la fuerza cortante actuante en la junta viga-columna no será mayor a la máxima permitida:

$$V_j \leq \varnothing\ \gamma\ A_j\ \sqrt{f_c'}$$



VIGA
V2
VIGA
V1
Vx
bv = bj
hj
PARA CORTE EN DIRECCION X
Aj = bj x hj
bv
VIGA
V1
Vy
hj
VIGA
V2
bj
PARA CORTE EN DIRECCION Y
Aj = bj x hj ≤ (bv+ hj) x hj
VIGA
V2
VIGA
V1
bv2
Vx
bv1
bj
hj
PARA CORTE EN DIRECCION X
Aj = bj x hj ≤ (bv1 + hj) x hj
bj
bv2
VIGA
V2
Vy
hj
VIGA
V1
bv1
PARA CORTE EN DIRECCION Y
Aj = bj x hj ≤ (bv2 + hj) x hj
VIGA
V1
bv1
Vx
bj
hj
PARA CORTE EN DIRECCION X
Aj = bj x hj ≤ (bv1 + hj) x hj
bj
bv1
VIGA
V1
Vy
hj
VIGA
V2
bv2
PARA CORTE EN DIRECCION Y
Aj = bj x hj ≤ (bv1 + hj) x hj

Figura 5.12

5.6.6 CAPACIDAD RESISTENTE AL CORTE DEL CONCRETO EN JUNTAS VIGAS-COLUMNAS

Las expresiones de resistencia al corte del concreto para vigas o secciones de columnas, son permitidas su utilización en juntas vigas-columnas con la modificación que la altura de junta Hj es igual a la altura útil "d" de la junta, por lo tanto, el corte en el concreto de las juntas se determina de acuerdo a la siguiente expresión,

$$V_{cu} = \left\{ 0{,}5\sqrt{f'c} + 1.408\left(\frac{Nu}{Mu - 3\,Nu\,hj}\right)\right\} Aj \leq \left(0{,}93\sqrt{f'c}\sqrt{1 + \frac{Nu}{35\,Aj}}\right) Aj$$

Se puede utilizar en forma conservadora que $V_{cu} = 0{,}53\sqrt{f'c}\,Aj$

5.6.7 CONTRIBUCION DEL ACERO EN LA RESISTENCIA AL CORTE EN JUNTAS VIGAS-COLUMNAS

Como las normas limitan la máxima fuerza cortante en la junta viga-columna con la expresión $V_{jmáx} = \emptyset\gamma\, Aj\sqrt{f'c}$ y a su vez limitan la capacidad de corte del concreto según se mostró en el punto anterior 5.6.5, la máxima fuerza de corte permitida en el acero a través de armaduras transversales se define $V_{sumáx} = V_{Umáx} - V_{cu}$, luego,

Para juntas confinadas $\gamma = 5{,}3$

$$V_{sumáx} = \left(4\sqrt{f'c} + 1.408\,\frac{Vu}{Mu - 3Nu\,hj}\right) Aj \leq \left(4{,}5 - 0{,}93\sqrt{1 + \frac{Nu}{35\,Aj}}\right)\sqrt{f'c}\,Aj$$

Y en forma conservadora se puede utilizar $V_{sumáx} = 3{,}98\sqrt{f'c}\,Aj$

Para juntas no confinadas $\gamma = 4{,}0$

$$V_{sumax} = \left\{ 2{,}9\sqrt{f'c} + 1.408\left(\frac{Vu}{Mu - 3Nu\,hj}\right)\right\} Aj \leq \left(3{,}4 - 0{,}93\sqrt{1 + \frac{Nu}{35\,Aj}}\right)\sqrt{f'c}\,Aj$$

Y en forma conservadora se puede utilizar $V_{sumáx} = 2{,}8\sqrt{f'c}\,Aj$

En todo caso, conocida la fuerza cortante que van a recibir la junta V_j y la máxima contribución que aporta el concreto V_{cu}, se tiene que el corte transmitido al acero transversal o ligaduras será la diferencia de los dos cortes:

$$V_{su} = V_j - V_{cu}$$

Conocido el corte en el acero se puede determinar el área de acero transversal requerido con la siguiente expresión:

$$A_s = \frac{V_{su}\, S}{\varnothing\, f_y\, h_j}$$

Se puede definir una mínima cantidad de área de acero requerido en función de la fuerza cortante del acero.

Acero mínimo para juntas confinadas, para S ≤ 15 cm.

$$A_{s\,min} = \frac{9\, V_{su}}{f_y\, h_j} \qquad \textit{(A. 18. 4. 2. 2.)}$$

Acero mínimo para juntas no confinadas, para S ≤ 10 cm.

$$A_{s\,min} = \frac{V_{su}}{8{,}5 f_y\, h_j} \qquad \textit{(A. 18. 3. 4. 4.)}$$

5.7 LONGITUD DE ANCLAJE DE CABILLAS EN LAS JUNTAS VIGAS-COLUMNAS

Para cabillas estriadas con gancho estándar a 90° dentro del concreto confinado por ligaduras, la longitud de anclaje Ld medida en la dirección de la barra será por lo menos igual a la mayor de las siguientes expresiones, siempre que el diámetro de la cabilla no exceda de Ø 1 3/8".

$$L_d \geq \begin{cases} 8\,\varnothing \\ 15 \text{ cm} \\ \dfrac{0{,}16\, f_y\, \varnothing}{\sqrt{f'c}} \end{cases} \qquad \textit{(A. 18. 4. 4. 1.)}$$

(0,06 fy ϕ)/√f'c

Donde Ø = Diámetro de la cabilla.

Y en cualquier caso es obligatorio que el gancho de 90° debe estar situado dentro del núcleo de la junta viga-columna, ver Fig. 5.13.

Para cabillas sin ganchos, cuyos diámetros no excedan de Ø 1 3/8", la longitud de anclaje Ld deberá ser por lo menos igual al mayor de las siguientes expresiones, si el espesor de concreto debajo de la cabilla no excede a 30 cm.

$$Ld \geq \begin{cases} 20\,Ø \\ 38 \text{ cm.} \\ \dfrac{0{,}15\, f_y\, Ø}{\sqrt{f'c}} \end{cases}$$ *(A. 18. 4. 4. 2.)*

Donde Ø = Diámetro de la cabilla

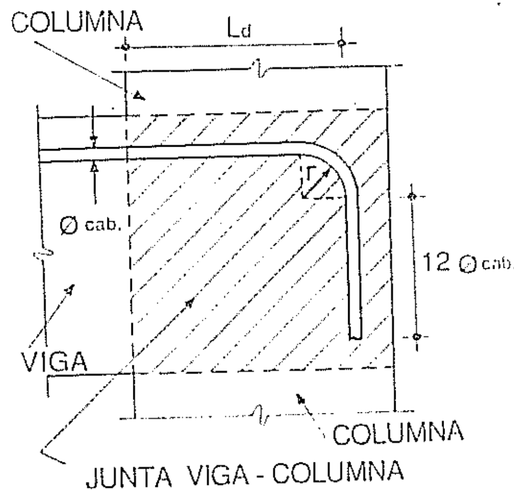


Figura 5.13

Para cabillas sin ganchos, cuyos diámetros no excedan de Ø 1 3/8", la longitud de anclaje Ld deberá ser por lo menos igual al mayor de las siguientes expresiones, si el espesor de concreto debajo de la cabilla excede a 30 cm.

$$Ld \geq \begin{cases} 28\,Ø \\ 53 \text{ cm.} \\ \dfrac{0{,}21\, f_y\, Ø}{\sqrt{f'c}} \end{cases}$$

Donde Ø = Diámetro de la cabilla

Cualquier porción de la longitud de anclaje Ld que no esté contenido en un núcleo confinado deberá incrementarse en un 60%.

5.8 NORMAS Y CRITERIOS DE DISEÑO

1.- El diámetro menor de los zunchos será de 3/8" (#3). *(A.7.10.4.2.)*

2.- Separación libre entre zunchos S será de 3,0 cm. ≥ S ≥ 8,0 cm. *(A.7. 10. 4. 3.)*

3.- Los zunchos se anclarán en sus extremos en 1 1/2 vuelta. *(A. 7. 10. 4. 4.)*

4.- La longitud de solape serán de 48 veces el diámetro del zuncho pero no menor de 30 cm., también se permite soldar los zunchos. *(A. 7. 10. 4. 5.)*

5.- Los zunchos en una columna arrancarán en forma contínua desde la parte inferior de la zapata, cabezal o losa, hasta el refuerzo horizontal más bajo de la próxima viga. *(A. 7. 10. 4. 6.)*

6.- Por encima y por debajo del nodo las ligaduras se espaciarán a la mitad de espaciamiento normalizadó. *(A. 7. 10. 5. 4.)*

7.- Cuando existan vigas y ménsulas, las ligaduras se determiñarán a no más de 8,0 cm. debajo de la armadura inferior del nodo. *(A. 7. 10. 5. 5.)*

8.- Si no hay vigas, los zunchos se llevarán al acero de la parte inferior de la losa. *(A. 7. 10. 4. 7.)*

9.- Para zunchos menores de Ø 5/8" se debe utilizar por lo menos 2 separadores verticales por cada paso de hélice con diámetro del núcleo menores de 50 cm. y 3 separadores verticales para diámetros mayores de 75 cm. *(A. 7. 10. 4. 10.)*

10.- Para zunchos iguales o mayores de Ø 5/8 " se utilizarán un mínimo de 3 separadores verticales por cada paso de hélice para diámetro de núcleos menores o iguales a 60 cm. y 4 separadores verticales por cada paso de hélice para diámetros de núcleos de más de 60 cm. de diámetro. *(A. 7. 10. 4. 10.)*

11.- Los diámetros mínimo y máximo entre ligaduras son 3/8" y 1/2" respectivamente. *(A. 7. 10. 5. 1.)*

12.- La relación entre diámetro de refuerzo longitudinal y transversal será la siguiente:

Diámetro del Acero Longitudinal			Mínimo Diámetro de Acero Transversal	(Ligaduras)
Igual a	1/2"	(#4)	1/4	(#2)
Menores de	1 1/4"	(#10)	3/8"	(#3)
Igual a	1 1/4"	(#10)	3/8"	(#4)
Igual a	1 3/8"	(#11)	1/2"	(#4)
Mayores a	1 3/8"	(#11)	1/2"	(#4)

13.- La máxima separación entre las ligaduras no excederá de 12 diámetros de la cabilla del refuerzo longitudinal o de la menor dimensión del miembro. *(A. 7. 10. 5. 2.)*

14.- Las ligaduras podrían tener ángulos de hasta 135°, ver Fig. 5.14. *(A. 7. 10. 5. 3.)*

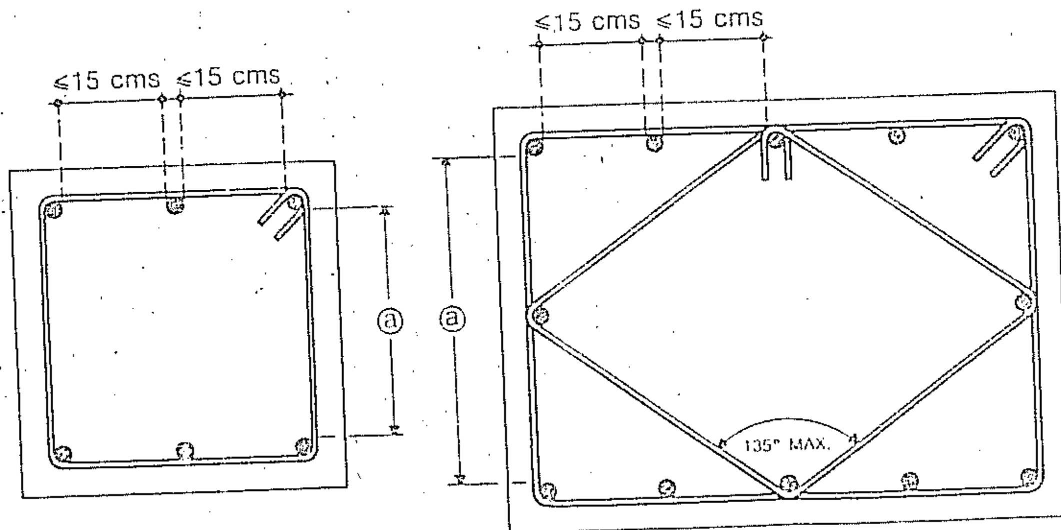


Figura 5.14

15.- Para miembros sujetos a compresión la fuerza cortante en el concreto es $V_{cu} \geq 0.53\,(1+0{,}007\ N_u/A_g)\sqrt{f'c}\ bd$.

Donde, N_u=Carga axial efectada por factor de carga deV_u *(A. 11. 3. 1. 2)*

16.- Para miembros sometidos a corte y flexión, la fuerza cortante en el concreto será: *(A. 11. 3. 2. 1)*

$$V_{cu} = (0{,}5\sqrt{f'c} + 176\,p\frac{Vud}{Mu})bd \leq 0{,}93\sqrt{f'c}\ bd \qquad \text{Donde, } \frac{Vud}{Mu} \leq 1.$$

17.- Para miembros sujetos a compresión axial la fuerza cortante en el concreto no será mayor de:

$$V_{cu} \leq (0{,}5\sqrt{f'c} + 176\,p\frac{Vud}{Mn})bd \leq 0.93\sqrt{f'c}\ bd$$

$$\text{Donde, } \frac{Vud}{Mn} \leq 1 \quad y \quad Mn = Mu - Pu\left(\frac{4h-d}{8}\right)$$

Si la relación Mn es negativa, entonces $V_{cu} \leq 0{,}93\sqrt{f'c}\sqrt{1+\frac{N_u}{35\ A_g}}\ bd$

Donde M_u= Momento afectado por factor de carga de V_u. *(A. 11. 3. 2. 2.)*

18.- Para miembros sujetos a tensión axial el corte en el concreto:

$$V_{cu} \leq 0{,}53\left(1+\frac{N_u}{35\ A_g}\right)\sqrt{f'c}\ bd \qquad (A.\ 11.\ 3.\ 2.\ 3.)$$

19.- La resistencia al corte del acero no será mayor de:

$V_{su} = 2,1 \sqrt{f'_c}\ b\,d$ *(A. 11. 4. 6. 8.)*

20.- Dentro de los nodos de vigas y columnas se proporcionará un refuerzo de ligaduras no menor de:

$A_s = \frac{3,5\,bS}{f_y}$ Donde, S = Separación de ligaduras
b = Ancho útil de la sección. *(A. 11. 4. 5. 3.)*

5.9 NORMAS Y CRITERIOS PARA EL DISEÑO SISMICO

1.- Para aplicar los siguientes criterios de diseño sismico se debe cumplir que:

a.- La carga axial mayorada de diseño sea mayor que $0{,}1\, f'_c\, A_g$ *(A. 18. 3. 1.)*

b.- La menor dimensión de la columna sea 30 cm. *(A. 18. 3. 1. a.)*

c.- La relación entre el ancho b y la altura h de la sección b/h no sea inferior a 0,4. *(A. 18. 3. 1. b.)*

2.- En cualquier nodo, la suma de las resistencias a flexión de las columnas que lleguen a ese nodo en un plano vertical, calculadas para la fuerza axial de diseño mas desfavorable deberá ser mayor que 1,20 veces la suma de las resistencias a flexión de las vigas concurrentes a ese nodo en el mismo plano vertical, ver Fig. 5.15. *(A.18.3.2.1.)*

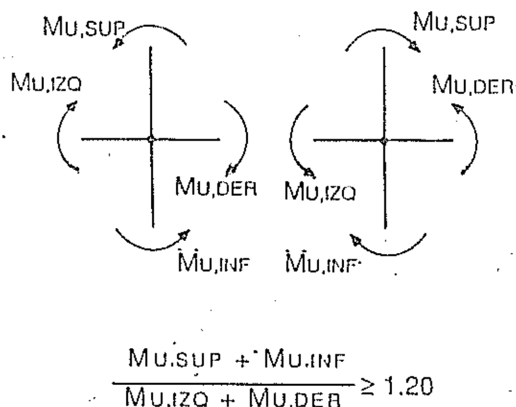


Figura 5.15

3.- El punto anterior no es obligado cumplirlo en pórticos de hasta 2 pisos y en el último nivel de un edificio de varios pisos. *(A. 18. 3. 2. 2.)*

4.- Si en un nodo no se cumple el punto 2, las columnas que llegan a ese nodo deben armarse en toda su altura con armadura transversal especificada en los puntos Nº 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11. *(A. 18. 3. 2. 2.)*

5.- La armadura transversal o ligaduras se colocara en toda la extensión de la altura del miembro y se colocará en los extremos de la columna en una longitud de por lo menos igual al mayor de los siguientes valores:

a.- La mayor dimensión de la sección transversal h.
b.- 1/6 de la altura libre Lu de la columna
c.- 45 cm. *(A. 18. 3. 4. 2. 1.)*

6.- La separación máxima de las ligaduras no será mayor que el menor de los siguientes valores:

a.- 1/4 de la menor dimensión de la sección transversal b.
b.- 10 cm.
c.- 35 cm. (en caso de ligaduras cerradas) *(A. 18. 3. 4. 4.)*

7.- El porcentaje de acero de la armadura helicoidal o zunchos pz, no será menor que:

$$p_z = \frac{0{,}45\, f'_c}{f_y}\left(\frac{A_g}{A_n} - 1\right) \quad \text{pero no menor que,} \quad p_z = 0{,}12\,\frac{f'_c}{f_y}$$

(A. 18. 3. 4. 3. 1.)

8.- El área de acero total de las ligaduras cerradas no será menor que el mayor de los siguientes valores:

$$A_s = 0{,}3\ S\, h_c\, \frac{f'_c}{f_y}\left(\frac{A_g}{A_n} - 1\right)$$

$$A_s = 0{,}12\ S\, h_c \frac{f'_c}{f_y}$$ Donde, S = Separación entre ligaduras.

h_c = Mayor dimensión del núcleo.

(A. 18. 3. 4. 3. 2.)

9.- Las ligaduras pueden ser cerradas, simples o múltiples o de una rama, los cierres de ganchos de las ligaduras deberán alternarse.

(A. 18. 3. 4. 3. 3.)

10.- En los miembros solicitados simultáneamente por flexión y carga axial, la fuerza cortante de diseño podrá ser el menor valor que se obtenga por alguno de los procedimientos que se describen a continuación:

10.1.- El corte de dieño se obtendrá a partir de los momentos resistentes nominales (con Ø=1) calculados para la fuerza axial de compresión mayorada que conduzca al máximo

momento flector. El corte será la división de los valores absoluto de ambos momentos entre la longitud libre de la columna. *(A. 18. 3. 4. 5.)*

10.2.- El corte será el doble del corte debido al sismo sumado a los cortes originados por otras acciones. *(A. 18. 3. 4. 5.)*
Excepciones:
a.- Cuando las columnas del último piso no satisfacen el punto 2 sólo se utilizará el punto 10.1.
b.- Para las columnas del primer piso, cuando se aplique el punto 10.2, el corte de diseño no será menor que el calculado suponiendo el momento resistente nominal en la base de la columna y el doble del momento resultante del análisis elástico lineal en su parte superior. En este caso el corte es la suma algebraica de los momentos así determinados entre la altura libre de la columna. *(A. 18. 3. 4. 5.)*

11.- El esfuerzo cortante que aporta el concreto V_{cu} se considera nulo, si la carga axial mayorada de diseño incluído los efectos del sismo es menor que $0{,}05\ A_g f'_c$. *(A. 18. 3. 4. 6.)*

12.- Las juntas vigas-columnas deben ser capaces de resistir las fuerzas y les transmiten los miembros que concurren a ellas, suponiendo que el refuerzo en las armaduras a tracción de las vigas es 1,25 fy. *(A.18.4.1.1.)*

13.- Dentro de la junta deberá disponerse el refuerzo transversal que se especifica en los Ptos. 7 y 8, salvo que la junta esté confinada por elementos estructurales.

14.- En juntas confinadas por vigas concurrentes en sus cuatro lados y donde el ancho de cada una sea por lo menos igual al 75% del ancho de la columna, se permite reducir la cantidad de acero transversal o ligaduras al 50% del exigido en los Ptos. 8 y 9 en una longitud igual a la menor altura de las vigas concurrentes y una separación no mayor de 15 cm. *(A. 18. 4. 2. 2.)*

15.- Si el refuerzo longitudinal de la viga no está dentro del núcleo de la columna, es obligatorio cumplir con los Ptos. 7 y 8.

16.- En toda junta debe verificarse que: $V_j \leq \emptyset\, \gamma\, A_j \sqrt{f'_c}$
Donde:

V_j = Fuerza cortante de diseño en la junta, suponiendo que el refuerzo en las armaduras de las vigas es $1{,}25\ f_y$.

γ = Factor igual a 5,3 en juntas confinadas en sus cuatro caras y 4 en cualquier otro caso.

Aj = Area de la menor sección transversal de la junta en un plano paralelo al eje del refuerzo longitudinal que transmite el corte en la junta. *(A. 18. 4. 3. 1.)*

17.- Para refuerzos de cabillas hasta Ø 1 3/8", la longitud de anclaje L_{ah} para una barra con gancho a 90° , será por lo menos igual a:

$$L_{ah} \geq \begin{cases} 8\,Ø \\ 15 \text{ cm.} \\ \dfrac{0{,}06\, f_y\, Ø}{\sqrt{f'_c}} \end{cases}$$

Donde, Ø = Diámetro de la cabilla

18.- Para refuerzos de cabillas hasta Ø 1 3/8 " la longitud de anclaje L_{as} será:

$$L_{as} = 2{,}5 \frac{0{,}06\, f_y\, Ø_c}{\sqrt{f'_c}}$$ => Si debajo de la cabilla no hay más de 30 cm.

$$L_{as} = 3{,}5 \frac{0{,}06\, f_y\, Ø_c}{\sqrt{f'_c}}$$ => Si debajo de la cabilla hay más de 30 cm.

(A. 18. 4. 4. 2.)

19.- La longitud de anclaje L_{as} del punto anterior deberá estar introducida en un núcleo confinado de concreto de una columna y si no lo estuviere, L_{as} se incrementará en un 60%. *(A. 18. 4. 4. 2.)*

20.- Se debe confinar el núcleo de la columna, sea zunchada o ligada, en la parte inferior y superior del nodo viga-columna una distancia mayor de:

a.- 1/6 de la altura libre L_u de la columna.
b.- La dimensión h mayor de la columna.
c.- 45 cm.

5.10 PROBLEMAS RESUELTOS DE CORTE Y DISEÑO DE JUNTAS → VIGA-COLUMNA

5.10.1 EJERCICIO Nº 1

Diseñar el acero de las ligaduras de una columna de dimensiones 60 x 60, para las cargas dadas y un acero longitudinal de acuerdo al indicado en la Fig. 5.16

DATOS:

P_u = 300 T. M_{uA} = 42 T-m M_{uB} = 50 T-m

24 Ø 1" f'_c = 210 K/cm² f_y = 4.200 K/cm²

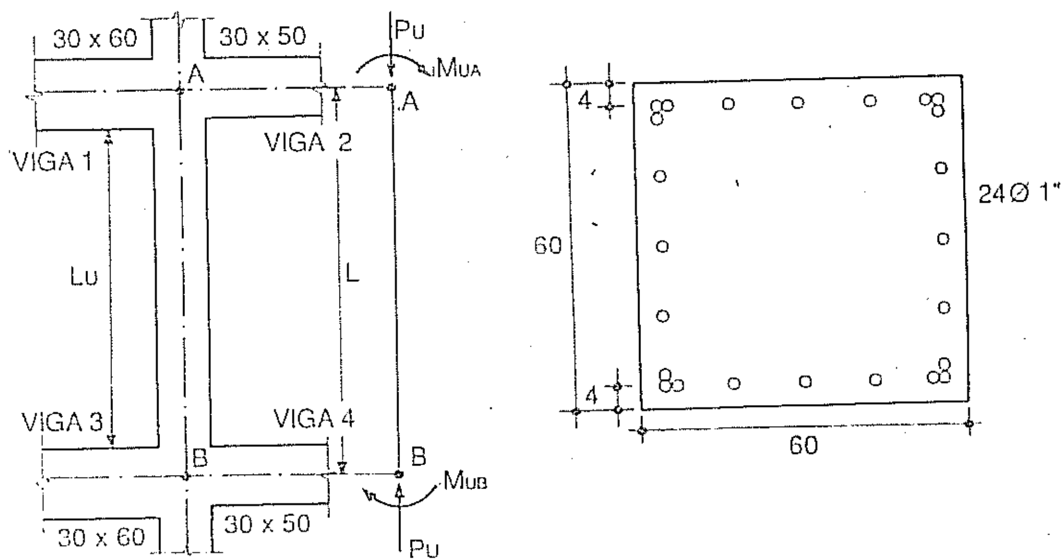


Figura 5.16

$$p_t = \frac{24 \times 5{,}07\text{cm}^2}{60 \times 60\ \text{cm}^2} = 0{,}0338$$

Para aplicar los criterios sísmicos se debe cumplir que $P_u > 0{,}1f'_cA_g$

P_u= 600.000 Kg. > $0{,}1f'_cA_g$ = 0,1 x 210 x 60 x 60 = 75.000 Kg. OK

Además se deben aplicar las siguientes condiciones.

Que h = 60 cm. > 30 cm. OK

y la relación b/h = 60/60 = 1 > 0,4 OK

AREA DE ACERO DE LIGADURAS POR CONFINAMIENTO

Se debe tomar el mayor de los siguientes valores, para área de acero de ligaduras requeridas por confinamiento cercano a los nodos.

$$A_s = 0{,}3\ S\ h_c\ \frac{f'_c}{f_y}\left(\frac{A_g}{A_n} - 1\right) \quad y \quad A_s = 0{,}12\ S\ h_c\ \frac{f'_c}{f_y}$$

Tomando S = 20 cm. y h_c = 52 cm.

$$A_s = 0{,}3 \times 20 \times 52\ \frac{210}{4.200}\left(\frac{60 \times 60}{52 \times 52} - 1\right) = 5{,}17\ \text{cm}^2$$

$$A_s = 0{,}12 \times 20 \times 52\ \frac{210}{4.200} = 6{,}24\ \text{cm}^2 > 5{,}17\ \text{cm}^2$$

Se requerirían ligaduras de Ø 3/8" de 9 ramas, esto no es un buen diseño. Tomando ligaduras de Ø 3/8" de 4 ramas, se determina la separación S requerida.

Area de acero de confinamiento A_{sconf} de ligaduras de cuatro (4) ramas.

$$A_{sconf} = 4 \times 0{,}71 \text{ cm}^2 = 2{,}84 \text{ cm}^2$$

Despejando el valor de S de las dos ecuaciones

$$2{,}84 = 0{,}3 \times S \times 52 \; \frac{210}{4.200}\left(\frac{60 \times 60}{52 \times 52} - 1\right) \Rightarrow S = 10{,}99 \text{ cm.}$$

$$2{,}84 = 0{,}12 \times S \times 52 \; \frac{210}{4.200} \Rightarrow S = 9 \text{ cm.}$$

La separación S = 9 cm. < 10,99 cm. cumple con las normas establecidas ya que:

$$S = 9 \text{ cm.} < \begin{cases} 10 \text{ cm.} \\ h/4 = 60/4 = 15 \text{ cm.} \\ 35 \text{ cm.} \end{cases}$$

Por lo tanto utilizar ligaduras Ø 3/8 " c/9 cm. de 4 ramas.

Según las normas, estas ligaduras se deben colocar hasta una distancia, la mayor de los tres valores siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} h = 60 \text{ cm.} \\ \frac{1}{6}L = \frac{1}{6} \times 290 = 48{,}3 \text{ cm.} \\ 45 \text{ cm.} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{En este caso manda 60 cm.}$$

Confinar con ligaduras Ø 3/8" c/9 cm. de 4 ramas hasta una distancia de 60 cm debajo y por encima de la viga superior e inferior respectivamente.

AREA DE ACERO DE LIGADURAS POR CORTE

Para el corte de diseño, como no se tiene información del momento actuante por sismo se utiliza el procedimiento Nº 1 de la norma, donde :

$$V_u = \frac{M_{uA} + M_{uB}}{ØL_u}$$

Donde $M_{uA} = M_{uB} = M_u$ porque el acero es igual a lo largo de toda la columna.

Para P_u= 300 T.=> $K_u = \frac{P_u}{f'_c bh} = \frac{300.000}{210 \times 60 \times 60} = 0,396$ y p_t=3,38%

De los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas, se obtiene $Ke/h \doteq 0,20$ con los parámetros conocidos K_u y p_t.

$$K\left(\frac{e}{h}\right) \Rightarrow M_u = 0,20 \times 210 \times 60 \times 60 \times 0,60 = 90.720 \text{ Kg–m}$$

Por lo tanto utilizando procedimiento 1.

$$V_u = \frac{2 \times 90.720}{0,7 \times 2,30} = 112.696 \text{ Kg.}$$

CORTE DEL CONCRETO EN FLEXO – COMPRESION

$$V_{cu} = \left(\left[0,53\sqrt{f'_c} + 176\, p\, \frac{V_u d}{M_m}\right] bd\right) \leq 0,93\sqrt{f'_c}\, bd \sqrt{1 + \frac{N_u}{35\, A_g}}$$ ⟨11.3.2.1⟩

Donde, $M_m = M_u - N_u\left(\frac{4h - d}{8}\right)$ ⟨11.3.2.2⟩

$$M_m = 90.720 - 300.000\left(\frac{4 \times 0,60 - 0,56}{8}\right) = 21.720 \text{ Kg–m}$$

Luego, $\frac{V_u d}{M_m} = \frac{112.696 \times 0,56}{21.720} = 2,9$.

$$V_{cu} = \left(0,53\sqrt{210} + 176 \times 0,0338 \times 2,9\right) 60 \times 56 = 103.247 \text{ Kg.}$$

$$V_{cu} = 0,93\sqrt{210} \times 60 \times 56 \sqrt{1 + \frac{300.000}{35 \times 60 \times 60}} = 83.262 \text{ Kg.} \Rightarrow V_{cu} = 83.262 \text{ Kg.}$$

Luego, V_{cu} = 83.262 Kg. > V_u = 112.696 Kg. ⇒ Requiere armadura de corte.

CORTE EN EL ACERO

$V_{su} = V_u - V_{cu}$ = 112.696 – 83.262 = 29.434 Kg.

$V_{smax} = 2,1\sqrt{f'_c}\, bd = 2,1\sqrt{210} \times 60 \times 56$ = 102.251 Kg. > V_{su} ⟨11.4.6.8⟩ *OK*

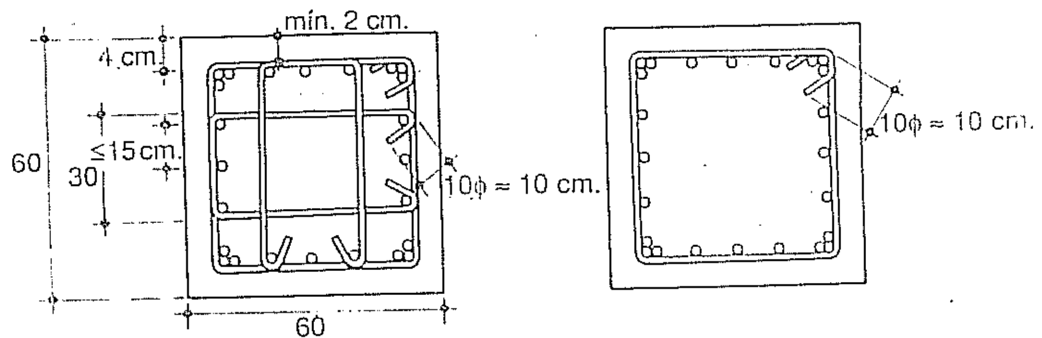
Area de acero requerida por corte utilizando la máxima separación de las ligaduras de confinamiento S = 9 cm.

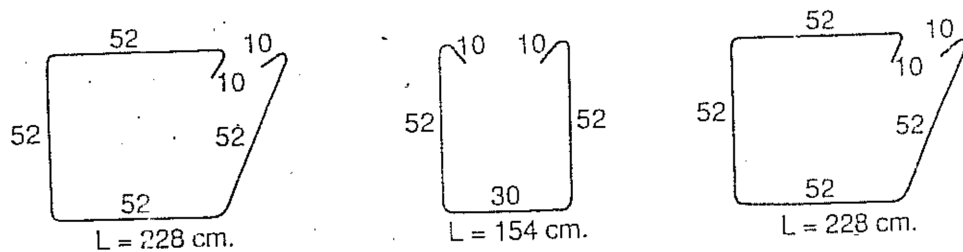
$$A_s = \frac{V_{su}\, S}{\varnothing f_y\, d} = \frac{29.434 \times 9}{0,85 \times 4.200 \times 56} = 1,32 \text{ cm}^2 < A_{Sconfin} = 2,84 \text{ cm}^2$$

25
35
1a LIGADURA A ≤ 2,5 cm.
0,60m.
2
CONFINAMIENTO φ 3/8" 4 RAMAS
7 LIG. EN 60 cm. ó 1.10m. C/9 cm.
1
0,60m.
25
35
25
25
2
11 LIGADURAS EN 1.10 m. ó C/9 cm.
φ 3/8" 2 RAMAS
1
2,30
2,90
25
25

CORTE 2 – 2

CORTE 1 – 1





NOTA: SOLO SE MUESTRAN LAS ARMADURAS TRANSVERSALES EN LA COLUMNA.

Figura 5.17

En este caso manda la armadura de confinamiento utilizar Ø 3/8" c/9 cm 4 ramas, ver diseño Fig. 5.17.
Las armaduras por corte o ligaduras se deberán llevar hasta 60 cm. debajo de la viga Nº 1 y 60 cm. por encima de las vigas Nº 3 y 4, después de este confinamiento se utilizarán ligaduras Ø 3/8" de dos ramas a la siguiente separación:

$$S = Ø\frac{As\ fy\ d}{Vs} = 0{,}85\frac{2 \times 0{,}71 \times 4.200 \times 52}{11.450} = 23{,}02 \text{ cm.} > 10 \text{ cm.}$$

Usar Ø 3/8" c/10 cm. 2 ramas, ver diseño en la Fig. 5.17.
En la otra dirección como no se tienen datos utilizar el mismo diseño.

5.10.2 EJERCICIO Nº 2

Diseñar la junta viga-columna de la columna mostrada en la Fig. 5.18 para las cargas y materiales dados.

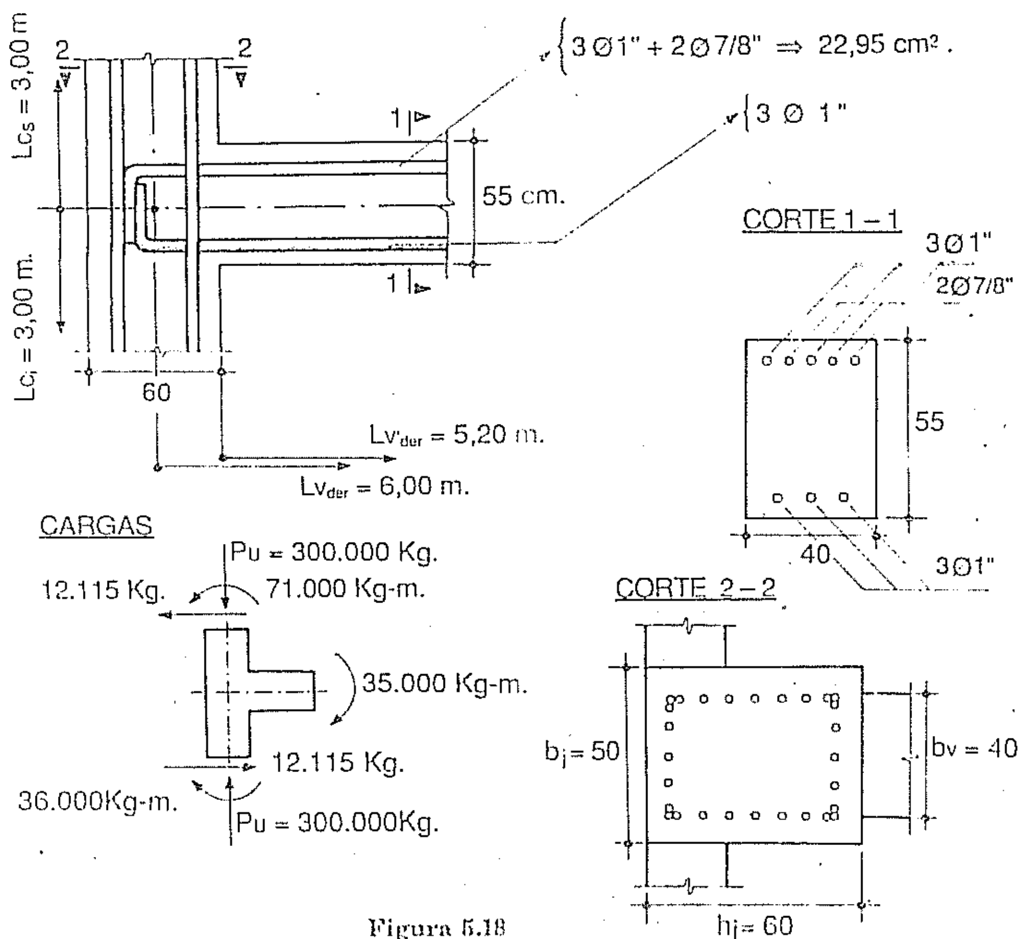


Figura 5.18

CARGAS

Mcinf	= 36.000 Kg–m
Mcsup	= 71.000 Kg–m
Mvder	= 63.000 Kg–m
Mvizq	= 0 Kg–m.
Lcsup	= 3,00 m.
Lcinf	= 3,00 m.
Lvder	= 6,00 m.
Lvizq	= 0 m.
Lv'der	= 5,20 m.
Lv'izq	= 0 m.

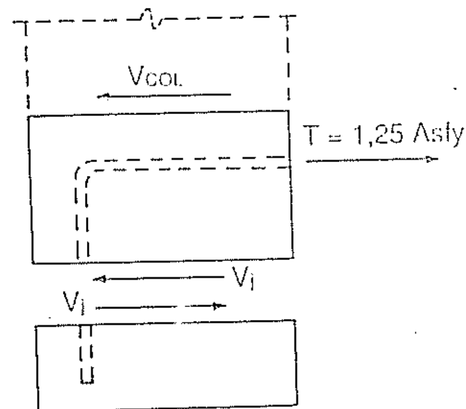


Figura 5.19

CHEQUEO DEL CORTE V_j EN LA JUNTA.

Se debe cumplir que $V_j \leq Ø\, \gamma A_j \sqrt{f'c}$, ver Fig. 5.19.

$\Sigma Fh = 0 \Rightarrow V_j = T - V_{col}$

$As = 3\,Ø1'' + 2\,Ø7/8'' = 3 \times 5{,}07 + 2 \times 3.87 = 22{,}95\ cm^2$

$T = 1{,}25 \times 22{,}95 \times 4.200 = 120.488$ Kg.

Corte V_{col} en la columna

$$V_{col} = \frac{2\left(\frac{Lvizq}{Lv'izq}\,Mvizq + \frac{Lvder}{Lv'der}\,Mvder\right)}{Lcsup + Lcin}$$

(el primer término está tachado, $\rightarrow 0$)

Donde, $Mvder = 1{,}25\ Asfy\left(d - \frac{1{,}25\ Asfy}{2 \times 0{,}85\ f'c\ b}\right)$

$$Mvder = 1{,}25 \times 22{,}95 \times 4.200\left(0{,}5 - \frac{1{,}25 \times 22{,}95 \times 4.200}{2 \times 0{,}85 \times 210 \times 40} \times \frac{1}{100}\right) = 50.078\ Kg\text{-}m$$

$$V_{col} = \frac{2\left(\frac{6{,}00}{5{,}20} \times 50.078\right)}{3 + 3} = 19.261\ Kg. > 12.115\ Kg.$$

Luego, se toma la fuerza cortante más desfavorable, V_{col} = 12.115 Kg.

$V_j = 120.488 - 12.115 = 108.373$ Kg.

Según normas se debe cumplir que, $V_j = 108.373 \leq Ø\, \gamma A_j \sqrt{f'c}$

Donde:

$A_j = bh \leq$ (ancho de viga (b_v) + alto de columna (h)) x alto (h)

$A_j = bh = 50 \times 60 = 3.000\ cm^2 \leq (bv + h)h = (40+60)60 = 6.000\ cm^2 \Rightarrow Aj = 3.000\ cm^2$

$\gamma = 4$

$\varnothing = 0{,}85$

Entonces se cumple que $V_j = 108.373$ Kg. $< 0{,}85 \times 4 \times 3.000 \times \sqrt{210} = 147.812$ Kg.

CONTRIBUCION DEL CONCRETO

Se considera que en la junta viga-columna se trabaja sólo a compresión axial, luego:

$$V_{cu} = \left(0{,}5\sqrt{f'c} + 176\, p \frac{V_u h}{M_m} \right) bh \quad y \quad M_n = M_u - N_u \frac{3h}{8}$$

Donde, d=h (Sólo en las juntas vigas-columnas)

Y, V_{cu} no podrá exceder de $V_{cu} = 0{,}93\sqrt{f'c}\, bh \sqrt{1 + \frac{N_u}{35\, A_g}}$

Entonces, $M_m = 71.000 - 300.000 - \frac{3 \times 0{,}60}{8} = 3.500$ Kg–m

$$V_{cu} = \left(0{,}5\sqrt{210} + 176 \frac{28 \times 5{,}07}{50 \times 60} \times \frac{108.373 \times 0{,}60}{3.500}\right) 50 \times 60 = 485.913 \text{ Kg.}$$

Nunca mayor de:

$$V_{cu} = 0{,}93\sqrt{210} \times 50 \times 60 \sqrt{1 + \frac{450.000}{35 \times 50 \times 60}} = 92.953 \text{ Kg.} < 485.913 \text{ Kg.} \qquad OK$$

De acuerdo a las normas.

Como $P_u = 450.000$ Kg. $> 0{,}05 f'c A_g = 0{,}05 \times 210 \times 50 \times 60 = 31.500$ Kg.

El corte en el concreto es $V_{cu} = 92.953$ Kg.

El corte en el acero $V_{su} = V_j - V_{su} = 108.373 - 92.953 = 15.420$ Kg.

Corte máximo permitido en el acero.

$V_{Smax} = 2{,}1\sqrt{f'c}\, bh = 2{,}1\sqrt{210} \times 50 \times 60 = 91.296$ Kg. $> V_{su}$ *OK*

AREA DE ACERO POR LIGADURAS

Utilizando la separación máxima según norma, la menor de:

$$S \leq \begin{cases} \frac{1}{4}\,b = \frac{1}{4} \times 50 = 12{,}5 \text{ cm.} \\ 10 \text{ cm.} \\ 35 \text{ cm. (ligaduras cerradas)} \end{cases}$$

Se toma separación de ligaduras S = 10 cm.

$$As = \frac{VsuS}{\varnothing fy\,h} = \frac{15.420 \times 9}{0.85 \times 4.200 \times 60} = 0{,}64 \text{ cm}^2$$

Al hacer la comparación con la armadura de confinamiento se utilizará la mayor de las áreas siguientes:

$$As = 0{,}3\ S\,hc\ \frac{f'c}{fy}\left(\frac{Ag}{An} - 1\right) \quad \text{y,}$$

$$As = 0{,}12\ S\,hc\,\frac{f'c}{fy}$$

Donde, hc = Dimensión transversal del núcleo = 42 cm

$$As = 0{,}3 \times 9 \times 42\,\frac{210}{4.200}\left(\frac{50 \times 60}{42 \times 52} - 1\right) = 2{,}35 \text{ cm}^2 \quad \text{y}$$

$$As = 0{,}12 \times 9 \times 42\,\frac{210}{4.200} = 2{,}52 \text{ cm}^2 > 2{,}35 \text{ cm}^2$$

Se requieren As = 2,52 cm^2 de ligaduras.

Como la junta no está confinada por sus cuatro lados, no se puede hacer disminución de ésta área de acero, por lo tanto se utilizarán ligaduras cerradas de Ø 1/2" de 2 ramas c/10 cm.

CHEQUEO DE LA RELACION DE LOS MOMENTOS

Se debe cumplir que $\frac{Mcsup + Mcinf}{Mvder} > 1{,}20$

MOMENTO RESISTENTE DE LA COLUMNA Mcsup y Mcinf.

En la cara superior e inferior del nodo para los siguientes parámetros:

b = 50 cm.
h = 60 cm.
Pu = 300.000 Kg.

$$p_t = \frac{28 \times 5.07\ cm^2}{50 \times 60} = 0{,}04732 \ \text{y}$$

$$\gamma = \frac{h-2r}{h} = \frac{60-(2 \times 4)}{60} = 0{,}866 \approx 0{,}9$$

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas pág. 60, con los parámetros K_u, γ y p_t se obtiene $K\ e/h$.

$$\left.\begin{aligned} K_u &= \frac{P_u}{f'c\,b\,h} = \frac{300.000}{210 \times 50 \times 60} = 0{,}476 \\ \gamma &= 0{,}9 \\ p_t &= 0.04732 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Se obtiene } K\frac{e}{h} = 0{,}241$$

Entonces, $M_u = K\,\frac{e}{h}\,f'c\,b\,h^2 = 0{,}241 \times 210 \times 50 \times 60 \times 0{,}60 = 91.098$ Kg–m

$M_{csup} = M_{cinf} = M_u = 91.098$ Kg–m

MOMENTO RESISTENTE DE LA VIGA $M_{vder} = \phi\left[(A_s - A'_s)f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s f_y \ldots\right.$

$$M_{vder} = 0{,}9\left((22{,}95 - 3 \times 5{,}07) \times 4.200\left(0{,}5 - \frac{0{,}0537}{2}\right) + 3 \times 5{,}07 \times 4.200(0{,}5 - 0{,}05)\right)$$

$M_{vder} = 39.715$ Kg–m

Chequeando la relación de los momentos.

$$\frac{M_{csup} + M_{cinf}}{M_{vder}} = \frac{2 \times 91.098}{39.715} = 4{,}58 > 1{,}20 \quad \textit{OK}$$

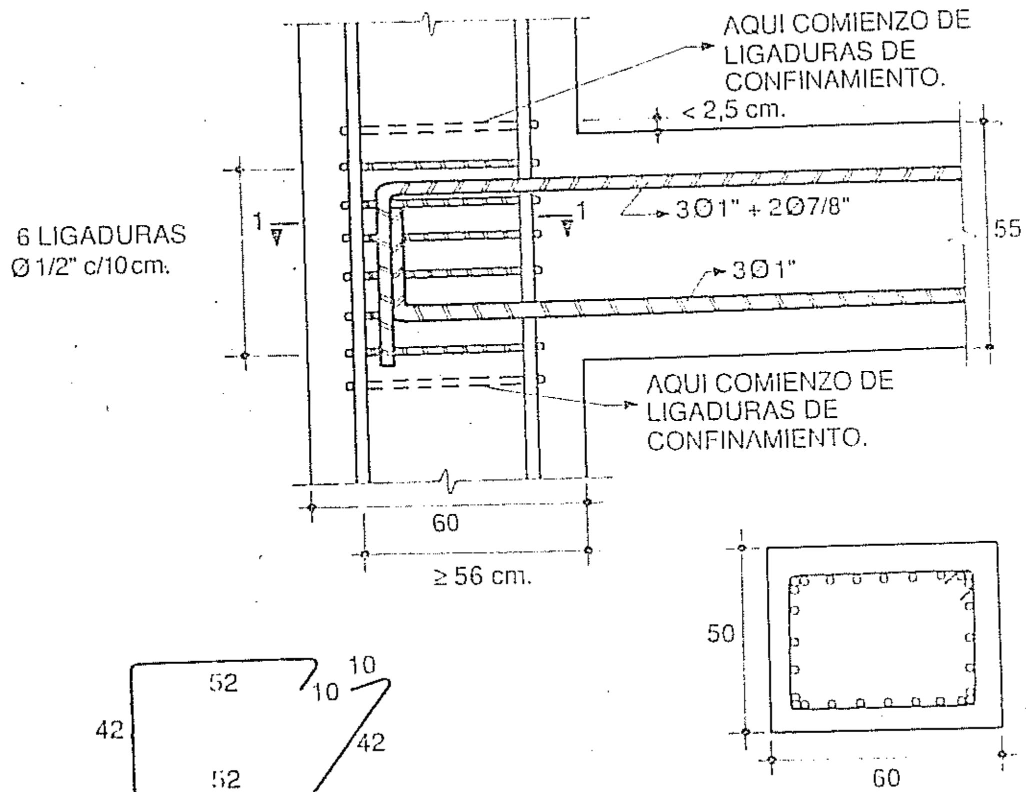
LONGITUD DE ANCLAJE L_d DE LAS CABILLAS DE LA VIGA

Se estudia para el mayor diámetro del refuerzo colocado, en este caso Ø 1"

$$L_d \geq \begin{cases} 8\,\text{Ø} = 8 \times 2{,}54 = 20{,}32 \text{ cm.} \\ 15 \text{ cm.} \\ \dfrac{0{,}06\,f_y\,\text{Ø}}{\sqrt{f'c}} = \dfrac{0{,}06 \times 4.200 \times 2{,}54}{\sqrt{210}} = 44{,}17 \text{ cm.} < 76 \text{ cm.} \\ \text{NOTA: 76 cm. es la distancia existente máxima.} \end{cases}$$

} Ojo 56 cm

Ver el diseño final en la Fig. 5.20.



Lig. Ø 1/2" c/10 cm. x L = 2,08 m.

Figura 5.20

5.10.3 EJERCICIO Nº 3

Diseñar el nodo viga-columna 1-A, de un pórtico en el que se han determinado las solicitaciones indicadas en la Fig. 5.21, de acuerdo a los materiales dados y las secciones de miembros indicados en la Fig. 5.22, utilizar concreto $f'_c = 210$ K/cm² y acero $f_y = 4.200$ K/cm².

De los cálculos se obtiene la máxima carga axial mayorada actuando con el corte de $P_u = 170$ T.

La condición más desfavorable para obtener el corte máximo de la columna V_{col} se determina en la dirección de X e Y y se diseña con el mayor, ver Fig. 5.23. En todos los casos las expresiones V_{col}, M_i, y V_j son las siguientes expresiones:

$$V_{col} = \frac{2\left(\frac{L_{vizq}}{L'_{vizq}} M_{vizq} + \frac{L_{vder}}{L'_{vder}} M_{vder}\right)}{L_{csup} + L_{cinf}} \quad \text{y}$$

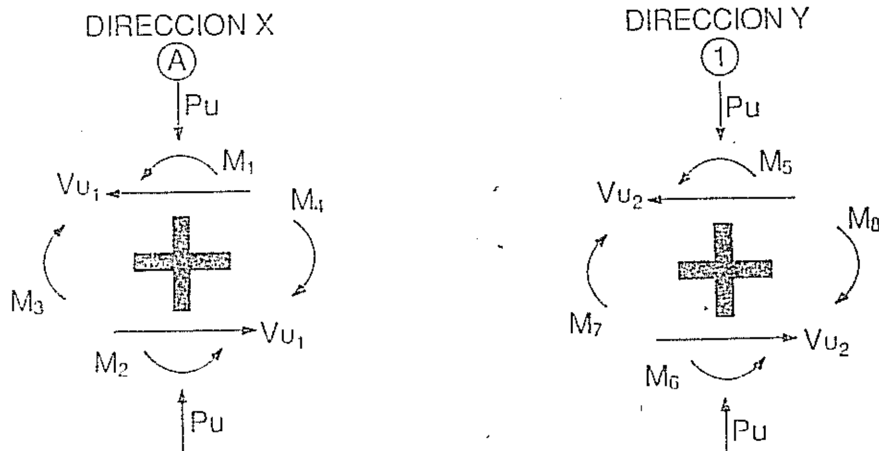
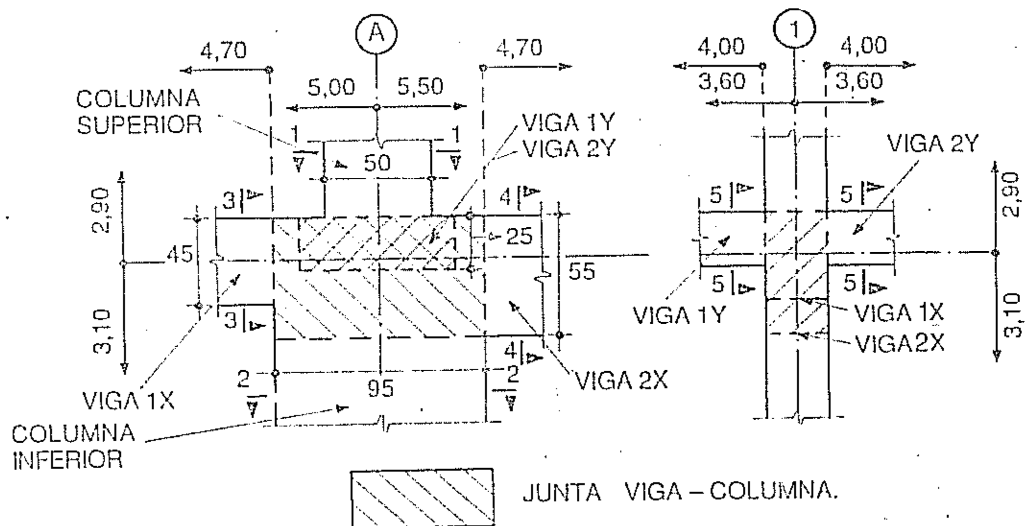


Figura5.21



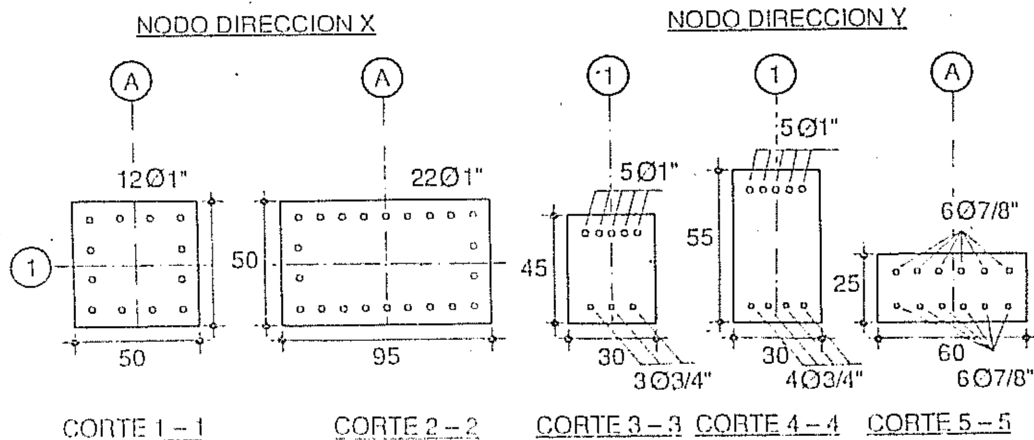
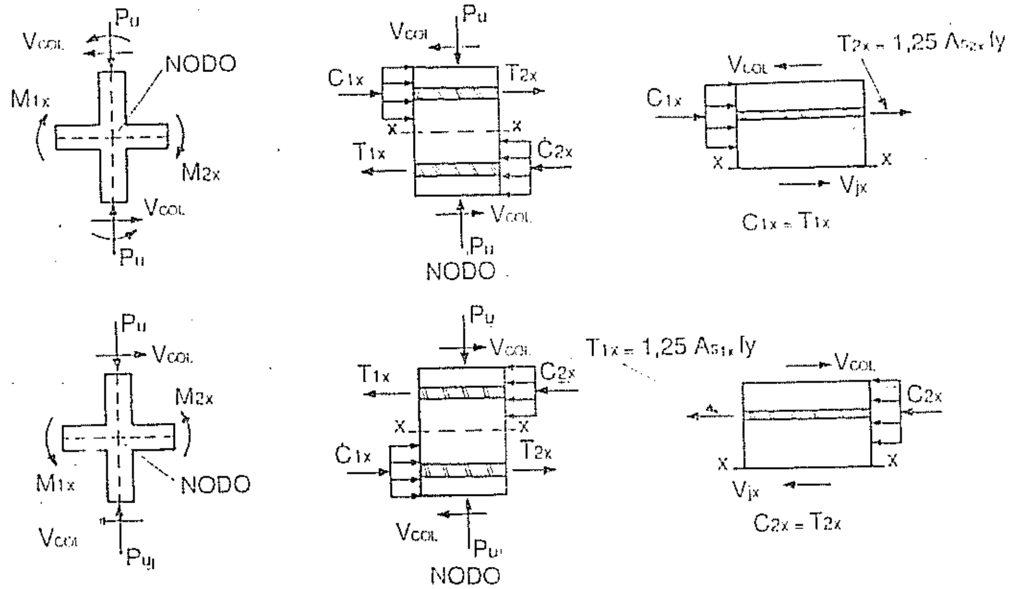


Figura 5.22

DIRECCION X



DIRECCION Y

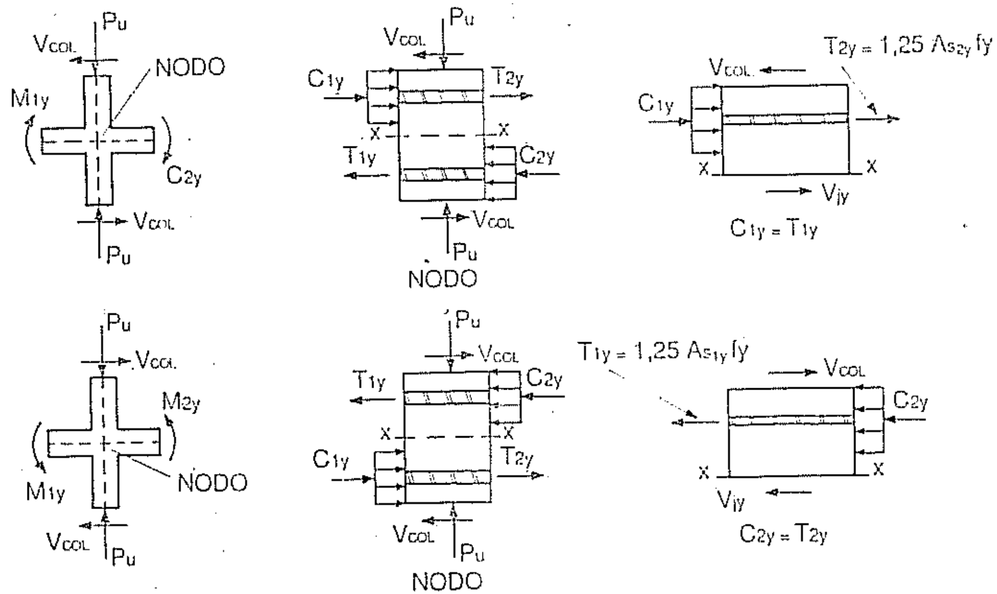


Figura 5.23

$$Mi = \emptyset\, 1{,}25\ Asi\ fy \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

Donde, $a = \dfrac{1{,}25\ Asi\ fy}{0{,}85 f'cb}$ y $\emptyset = 1{,}00$

$$Vj = 1{,}25\ (\ As_{izq} + As_{der})\ fy - V_{col}$$

DETERMINACION DEL CORTE Vj EN LA JUNTA VIGA-COLUMNA
DIRECCION X CASO A

$$M_{1x} = 1{,}25 \times 3 \times 2{,}84 \times 4.200 \left(0{,}4 - \frac{1{,}25 \times 3 \times 2{,}84 \times 4.200}{2 \times 0{,}85 \times 210 \times 30} \times \frac{1}{100} \right)$$

$$M_{1x} = 16.024 \text{ Kg-m}$$

$$M_{2x} = 1{,}25 \times 5 \times 5{,}07 \times 4.200 \left(0{,}5 - \frac{1{,}25 \times 5 \times 5{,}07 \times 4.200}{2 \times 0.85 \times 210 \times 30} \times \frac{1}{100} \right)$$

$$M_{2x} = 50.006 \text{ Kg-m}$$

$$V_{col} = \frac{2\left(\frac{5{,}00}{4{,}70} 16.024 + \frac{5{,}50}{4{,}70} 50.006 \right)}{2{,}90 + 3{,}10} = 25.188 \text{ Kg.}$$

$$V_{jxA} = 1{,}25\ (3 \times 2{,}84 + 5 \times 5{,}07)\ 4.200 - 25.188 = 152.630 \text{ Kg.}$$

DIRECCION X CASO B

$$M_{1x} = 1{,}25 \times 5 \times 5{,}07 \times 4.200 \left(0{,}4 - \frac{1{,}25 \times 5 \times 5{,}07 \times 4.200}{2 \times 0{,}85 \times 210 \times 30} \times \frac{1}{100} \right)$$

$$M_{1x} = 36.697 \text{ Kg-m}$$

$$M_{2x} = 1{,}25 \times 4 \times 2.84 \times 4.200 \left(0{,}5 - \frac{1{,}25 \times 6 \times 3{,}87 \times 4.200}{2 \times 0{,}85 \times 210 \times 60} \times \frac{1}{100} \right)$$

$$M_{2x} = 13.995 \text{ Kg-m}$$

$$V_{col} = \frac{2\left(\frac{5{,}00}{4{,}70} 36.697 + \frac{5{,}50}{4{,}70} 26.499 \right)}{2{,}90 + 3{,}10} = 11.675 \text{ Kg.}$$

$$V_{jxB} = 1{,}25\ (\ 5 \times 5{,}07 + 4 \times 2{,}84)\ 4.200 - 11.675 = 181.053 \text{ Kg.} > V_{jXA}$$

Se toma como corte en la junta en dirección X el mayor que ocurre en el nodo B, $V_{jx} = 181.053$ Kg.

DIRECCION Y CASO C

$$M_{1y} = M_{2y} = 1{,}25 \times 6 \times 3{,}87 \times 4.200 \left(0{,}20 - \frac{1{,}25 \times 6 \times 3{,}87 \times 4.200}{2 \times 0{,}85 \times 210 \times 60} \times \frac{1}{100} \right)$$

M_{1x} = 13.995 Kg–m

$$V_{col} = \frac{2\left(\frac{4{,}00}{6{,}60}\ 13.955\right) \times 2}{2{,}90 + 3{,}10} = 10.337 \text{ Kg}$$

V_{jyc} =1,25 (2 x 6 x 3,87 x 4.200) – 10.337 = 233.473 Kg.

DIRECCION X CASO D

$M_{1y}=M_{2y}$=13.955 Kg–m Igual al caso anterior por ser simétrica la viga.

V_{col}= 10.337 Kg.

$V_{jyD} = V_{jyC} = V_{jy}$= 233.473 Kg.

La norma obliga que se cumpla $V_j \leq \emptyset \gamma A_j \sqrt{f'c}$, ver la Fig. 5.24.

Como la junta tiene vigas por sus cuatro lados se debe cumplir que las vigas concurrentes cubran al menos las 3/4 partes de cada cara de la junta en este caso en la Viga 1Y y Viga 2Y la altura h=25 cm. es menor que la 3/4 parte de 55 cm., por lo tanto no hay junta confinada y el factor $\gamma = 4$.

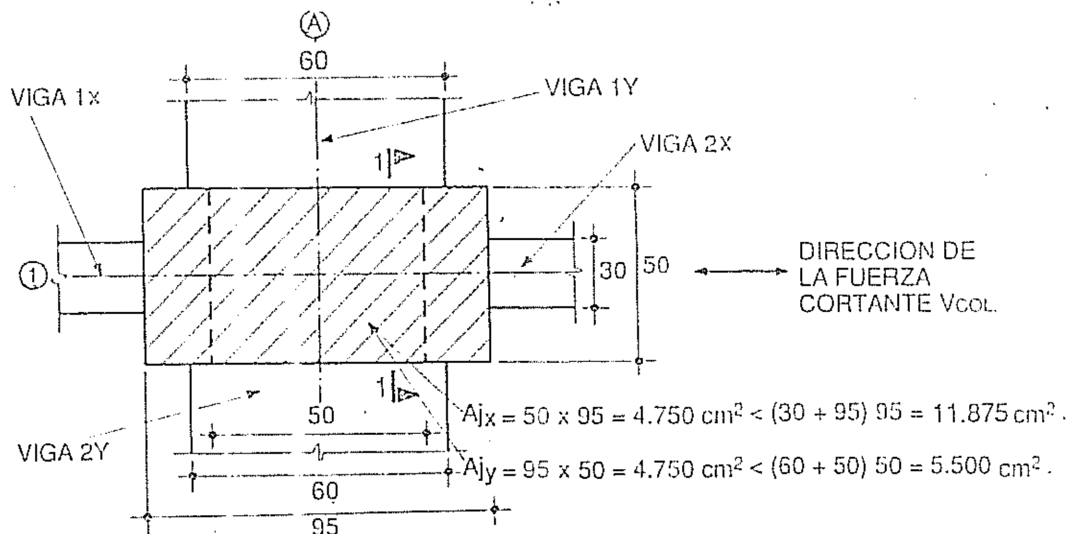


Figura 5.24

PARA LA DIRECCION X

V_{jx}= 181.053 Kg. < $\varnothing\gamma A_j \sqrt{f'c}$ = 0,85 x 4 x 4.750 $\sqrt{210}$ = 234.035 Kg. OK

PARA LA DIRECCION Y

V_{jy}= 233.473 Kg. < $\varnothing\gamma A_j \sqrt{f'c}$ = 0,85 x 4 x 4.750 $\sqrt{210}$ = 234.035 Kg. OK

NOTA: Si la expresión de Vj fuera mayor que $\varnothing\ \gamma\ A_j \sqrt{f'c}$ las normas no permiten otra alternativa que, aumentar el área de concreto de la junta Aj, es decir esto equivale a tener que aumentar el área de columna. Esto induce que para tener la seguridad de cumplir con las normas es aconsejable mantener el área de concreto de las columnas bastante grande y así evitar congestionamiento de aceros en los nodos.

DISEÑO DEL AREA DE ACERO DE CONFINAMIENTO DE JUNTA

La contribución de concreto según normas:

$$V_{cu}=\left(0,5\sqrt{f'c}+176\,p\frac{V_u h}{M_m}\right)bh \leq 0,93\sqrt{f'c}\ \ bh\sqrt{1+\frac{N_u}{35\,A_g}}$$

Donde, $M_m = M_u - N_u\left(\frac{3h}{8}\right)$

DIRECCION X

$$M_m= 120.000 - 170.000\frac{3 \times 0,95}{8} = 59.438 \text{ Kg-m}$$

$$V_{cu}=\left(0,5\sqrt{210}+176 \times 0,0234\frac{32.000 \times 0,95}{59.438}\right)50 \times 95 = 44.422 \text{ Kg.}$$

$$V_{cu}= 0,93\sqrt{210} \times 50 \times 95\sqrt{1+\frac{170.000}{35 \times 50 \times 95}} = 91.041 \text{ Kg.} > 44.422 \text{ Kg.}$$

Como P_u = 170.000 Kg. > 0,05 x 210 x 50 x 95 = 49.875 Kg. => V_{cu} = 44.422 Kg.

Corte en el acero, $V_{su}= V_j - V_u$= 181.053 – 44.422= 136.631 Kg.

Corte máximo permitido en el acero.

$V_{smáx} = 2,1\sqrt{f'c}\ bh= 2,1\sqrt{210} \times 50 \times 95$= 144.551 Kg. > 136.631 Kg. OK

AREA DE ACERO POR CONFINAMIENTO

Tomando separación máxima S=10 cm., se toma la mayor As de, las siguientes expresiones:

$$As = 0{,}30\ S\ hc \frac{f'c}{fy}\left(\frac{Ag}{An} - 1\right) \quad y \quad As = 0{,}12\ S\ hc\ \frac{f'c}{fy}$$

Donde, hc = Dimensión transversal del núcleo en la dirección X = 42 cm.

Entonces:

$$As = 0{,}30 \times 10 \times 42\ \frac{210}{4.200}\left(\frac{50 \times 95}{42 \times 87} - 1\right) = 1{,}89\ cm^2$$

$$As = 0{,}12 \times 10 \times 42\ \frac{210}{4.200} = 2{,}52\ cm^2 > 1{,}89\ cm^2$$

Comparación y chequeo con el área de acero requerida por corte.

$$As = \frac{Vsu\ S}{\varnothing\ fy\ hx} = \frac{136.631 \times 10}{0{,}85 \times 4.200 \times 95} = 4{,}02\ cm^2 > 2{,}52\ cm^2$$

La norma en este caso no permite disminuir el área de acero As = 4,02 cm^2 por no haber confinamiento por las cuatro vigas que llegan al nodo.
Se utilizan ligaduras Ø1/2" c/10 cm. 4 ramas, ver Fig. 5.25.

DIRECCION Y

$$Mm = 13.000 - 170.000\frac{3 \times 0{,}50}{8} = -18.875\ Kg\text{-}m \quad \text{(Nótese que es negativo)}$$

Como Mm < 0 sólo es válida la expresión siguiente:

$$Vcu = 0{,}93\sqrt{210}\ \times 95 \times 50\sqrt{1 - \frac{170.000}{35 \times 95 \times 50}} = 91.041\ Kg.$$

Corte en el acero $Vsu = Vjy - Vc = 233.473 - 91.041 = 142.432$ Kg.

Corte máximo permitido en el acero.
Del caso anterior $Vsmáx = 144.551$ Kg. > 142.432 Kg. *OK*

AREA DE ACERO POR CONFINAMIENTO

Tomando separación de S=10 cm. por referencia de las ligaduras ya colocadas en la dirección X, como en el caso anterior se toma la mayor As de las siguientes expresiones:

$$As = 0{,}35\ S\ hc \frac{f'c}{fy}\left(\frac{Ag}{An} - 1\right) \quad y \quad As = 0{,}12\ S\ hc \frac{f'c}{fy}$$

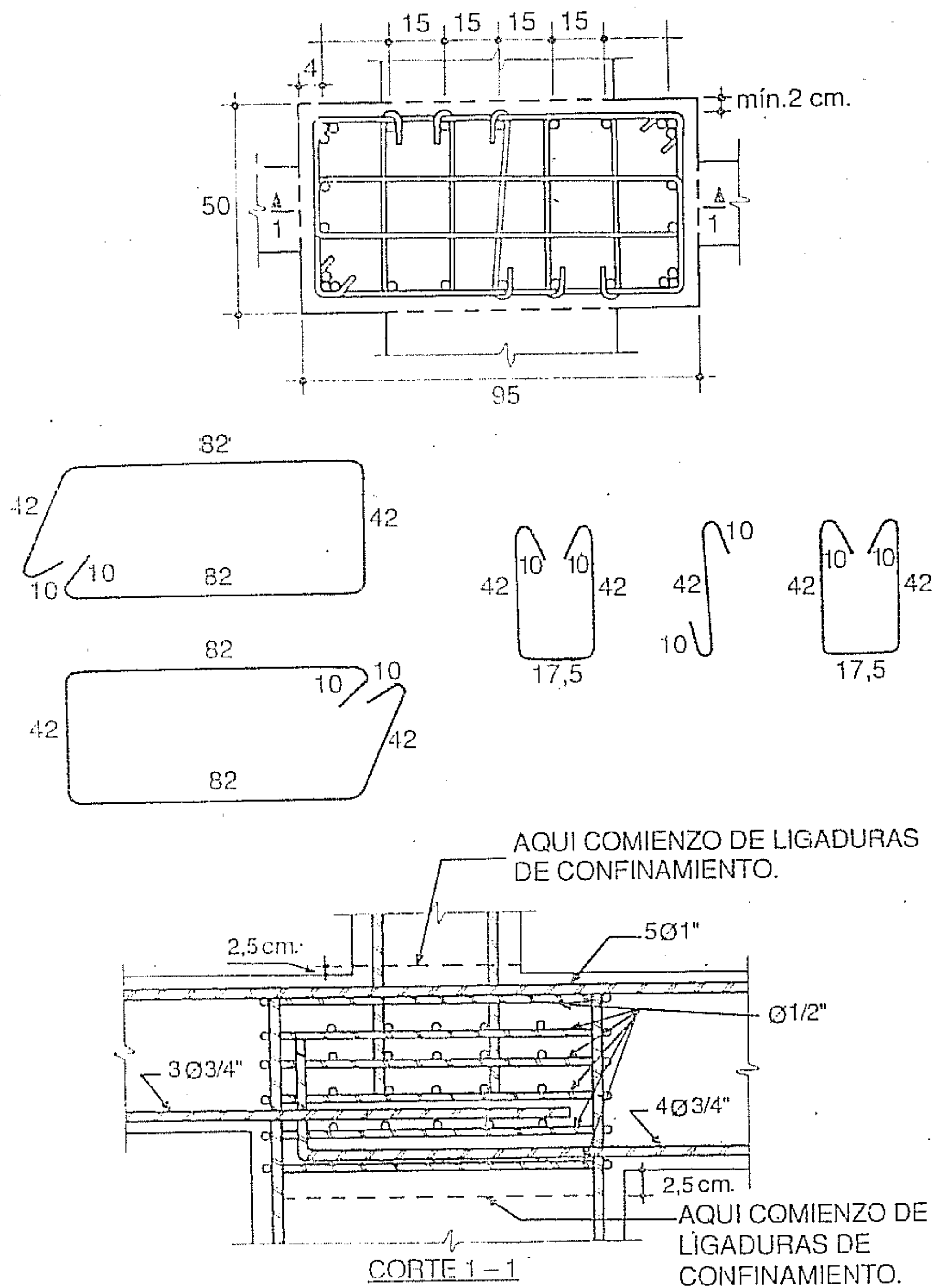

15
15
15
15
4
mín.2 cm.
50
A
1
A
1
95
82
42
42
10
10
82
82
10
10
42
42
82
10
10
42
42
17,5
10
42
10
10
10
42
42
17,5
AQUI COMIENZO DE LIGADURAS
DE CONFINAMIENTO.
2,5 cm.
5Ø1"
Ø1/2"
3 Ø3/4"
4Ø3/4"
2,5 cm.
AQUI COMIENZO DE
LIGADURAS DE
CONFINAMIENTO.
CORTE 1 – 1

Figura 5.25

Donde, hc= Dimensión transversal del núcleo en la dirección Y= 87 cm.

Entonces:

$$As = 0{,}3 \times 10 \times 87 \frac{210}{4.200}\left(\frac{50 \times 95}{42 \times 87} - 1\right) = 3{,}91 \text{ cm}^2$$

$$As = 0{,}12 \times 10 \times 87 \frac{210}{4.200} = 5{,}22 \text{ cm}^2 > 3.91 \text{ cm}^2$$

Comparación y chequeo con el área de acero requerida por corte.

$$As = \frac{Vsu\ S}{\varnothing\ fy\ hy} = \frac{142.432 \times 10}{0{,}85 \times 4.200 \times 50} = 7.98 \text{ cm}^2 > 5{,}22 \text{ cm}^2$$

Utilizar ligaduras Ø 1/2 " c/10 cm. 7 ramas, ver Fig. 5.25.

CHEQUEO DE RELACION DE MOMENTOS

Se debe cumplir que $\frac{Mcsup + Mcinf}{Mvizq + Mvder} > 1{,}20$

DIRECCION X

Se analiza para el caso de la Fig.5.26.a.

MOMENTO RESISTENTE DE LA COLUMNA SUPERIOR $Mcsup$

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas Tablas y Gráficas pág. 59, con los siguientes parámetros:

$$\left.\begin{array}{l} Pu = 170.000 \text{ Kg} \\ Ku = \dfrac{Pu}{f'c\ bh} = \dfrac{170.000}{210 \times 50 \times 50} = 0.35 \\ \gamma = \dfrac{50 - 2 \times 4}{50} = 0{,}84 \Rightarrow \gamma = 0{,}8 \\ p_t = \dfrac{12 \times 5.07}{50 \times 50} = 0{,}024 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Se obtiene } K\frac{e}{h} = 0{,}16$$

$$Mcsup = K\frac{e}{h} f'c\ bh^2 = 0{,}16 \times 210 \times 40 \times 50 \times 0{,}50 = 42.000 \text{ Kg–m.}$$

MOMENTO RESISTENTE DE LA COLUMNA INFERIOR Mcinf

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas pag. 60, con los siguientes parámetros:

$$\left.\begin{array}{l} Pu = 170.000 \text{ Kg} \\ Ku = \dfrac{Pu}{f'c\ bh} = \dfrac{170.000}{210 \times 50 \times 95} = 0{,}170 \\ \gamma = \dfrac{95 - 2 \times 4}{95} = 0{,}915 \Rightarrow \gamma = 0{,}9 \\ p_t = \dfrac{22 \times 5{,}07}{50 \times 95} = 0{,}023 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se obtiene } K\frac{e}{h} = 0{,}176$$

$$Mcinf = K\frac{e}{h} f'c\ bh^2 = 0{,}176 \times 210 \times 50 \times 95 \times 0{,}95 = 166.782 \text{ Kg-m}$$

MOMENTO RESISTENTE DE LA VIGA DE LA DERECHA. Mvder

$$Mvder = 0{,}9\left((5 \times 5{,}07 - 4 \times 2{,}84)\ 4.200\left(0{,}5 - \frac{0{,}1097}{2}\right) + 4 \times 2{,}84 \times 4.200\ (0{,}5 - 0{,}05)\right)$$

$$Mvder = 42.856 \text{ Kg-m}$$

MOMENTO RESISTENTE DE LA VIGA DE LA IZQUIERDA, Mvizq

$$Mvizq = 0{,}9\left(3 \times 2{,}84 \times 4.200\left(0{,}4 - \frac{0{,}066}{2}\right)\right) = 11.820 \text{ Kg-m}$$

NOTA: Obsérvese que se ha calculado el momento resistente de la viga de la izquierda Mv_{zq}, considerando tracción abajo y desechando el acero a compresión en este caso por ser mayor el acero a compresión que el acero a tensión, ver Fig. 5.26.a.

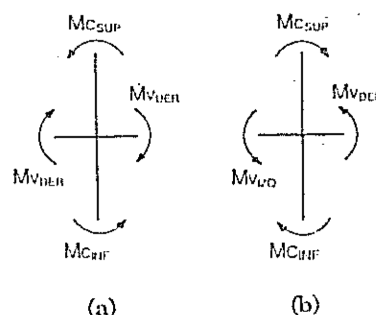


Figura 5.26

Entonces:

$$\frac{Mcsup + Mcinf}{Mcizq + Mvder} = \frac{42.000 + 166.782}{11.820 + 42.856} = 3{,}81 > 1{,}20$$

OK

Análisis del caso de la Fig. 5.26.b

Los momentos de las columnas son los mismos ya calculados, en vista que el acero es simétrico e igual en sus cuatro caras.

$M_{csup} = 42.000$ Kg–m y $M_{cinf} = 106.782$ Kg–m

MOMENTO RESISTENTE DE LA VIGA DE LA DERECHA, M_{vder}

$$M_{vizq} = 0{,}9\left((5x5{,}07-3x2{,}84)4.2000\left(0{,}4-\frac{0{,}132}{2}\right)+3x2{,}84x4.200(0{,}4-0{,}05)\right)$$

MOMENTO RESISTENTE DE LA VIGA DE LA IZQUIERDA, M_{vizq}

$$M_{vizq} = 0{,}9\left((5x5{,}07-3x2{,}84)4.2000\left(0{,}4-\frac{0{,}132}{2}\right)+3x2{,}84x4.200(0{,}4-0{,}01)\right)$$

$M_{vizq} = 32.520$ Kg–m

Entonces:

$$\frac{M_{csup}+M_{cinf}}{M_{vizq}+M_{vder}}=\frac{42.000+106.782}{19.500+32.520}=4{,}01>1{,}20 \qquad OK$$

DIRECCION Y

MOMENTO RESISTENTE DE LA COLUMNA SUPERIOR, M_{csup}

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas pág. 59, con los siguientes parámetros:

$$\left.\begin{array}{l} Pu = 170.000 \text{ Kg} \\ Ku = \dfrac{Pu}{f'c\,bh}=\dfrac{170.000}{210 \times 50 \times 50}=0{,}325 \\ \gamma = \dfrac{50-2 \times 4}{50}=0{,}84 \Rightarrow \gamma=0{,}8 \\ p_t=\dfrac{12 \times 5{,}07}{50 \times 50}=0{,}024 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se obtiene } K\frac{e}{h}=0{,}16$$

$$M_{csup} = K\frac{e}{h}\,f'c\,b\,h^2 = 0{,}16 \times 210 \times 50 \times 50 \times 0{,}50 = 42.000 \text{ Kg–m}$$

MOMENTO RESISTENTE DE LA COLUMNA INFERIOR, M_{cinf}

Entrando a los Diagramas de Interacción Adimensionales del Autor, Manual de Columnas, Tablas y Gráficas pág. 59, con los siguientes parámetros:

$$\left.\begin{array}{l} Pu = 170.000 \text{ Kg} \\ Ku = \dfrac{Pu}{f'c\,bh}=\dfrac{170.000}{210 \times 95 \times 50}=0{,}170 \\ \gamma = \dfrac{50-2 \times 4}{50}=0{,}84 \Rightarrow \gamma=0{,}8 \\ p_t=\dfrac{22 \times 5{,}07}{50 \times 95}=0{,}023 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Se obtiene } K\frac{e}{h}=0{,}158$$

$M_{cinf} = K \frac{e}{h}\ f'_c\ b\ h^2 = 0{,}158 \times 210 \times 95 \times 0{,}50 \times 0{,}50 = 78.802$ Kg–m

MOMENTO RESISTENTE DE LAS VIGAS DERECHA E IZQUIERDA

$M_v = M_{vder} = M_{vizq}$ (Por tener aceros simétricos)

$M_v = 0{,}9\left(6 \times 3{,}87 \times 4.200\left(0{,}2 - \frac{0{,}09}{2}\right)\right) = 13.605$ Kg–m (Se desprecia acero a compresión).

Entonces:

$$\frac{M_{csup} + M_{cinf}}{2\ M_v} = \frac{42.000 + 166.787}{2 \times 13.605} = 7{,}67 > 1{,}20 \qquad OK$$

Ver el diseño definitivo en la Fig. 5.25.

CAPITULO VI

Selección de Cargas y Predimensionado de Columnas

6.1 INTRODUCCION

Cuando se habla de este tema, es posible entrar en incongruencias con procedimientos que posiblemente se hallan generalizado por su uso y aplicación, con el correr de los años y avanzar en investigaciones que se realizan es posible conseguirse modificaciones sustanciales, es por eso, que se comentarán las normas vigentes para el momento de la publicación de este texto.

6.2 CARGAS MUERTAS

Son cargas verticales provenientes del peso de la estructura y materiales de acabados que tengan carácter permanente.

6.3 CARGAS VIVAS

Son cargas verticales que no tienen carácter permanente, son impuestas a la estructura por el uso que se le da.

6.4 CARGAS LATERALES

Son provenientes de los movimientos sísmicos, vientos y en general cualquier carga distinta a los verticales. Las cargas muertas y vivas se engloban como cargas verticales ya que trabajan en esa dirección, por supuesto las solicitaciones que éstas generan se llaman también solitaciones por cargas verticales, tales como carga axial vertical o momento vertical.

A continuación se muestra las normas respecto a la mayoración de cargas que impone la teoría de los estados límites.

C.5 COMBINACIONES DE CARGAS

CARGA MUERTA Y VIVA (A. 9. 2. 1.)

$U = 1{,}4D + 1{,}7L$

CARGA MUERTA, VIVA Y VIENTO (A. 9. 2. 3.)

$U = 1{,}4D + 1{,}7L$ o,
$U = 0{,}75\,(1{,}4\,D + 1{,}7\,L + 1{,}7\,W)$
$U = 0{,}9\,D + 1{,}4\,W$ o,

CARGA MUERTA, VIVA Y SISMO (A. 9. 2. 2.)

$U = 1{,}4\,D + 1{,}7L$ o,
$U = 0{,}75\,(1{,}4D + 1{,}7L + 1{,}9E)$ o,
$U = 0{,}9\,D + 1{,}4\,E$

CARGA MUERTA,VIVA Y EMPUJE DE TIERRA (A. 9. 2. 4.)

$U = 1{,}4\,D + 1{,}7L$ o,

$U = 1.4D + 1.7\,L + 1.7\,H$

(Si D se opone a H)

$U = 0{,}9\,D + 1{,}7\,L + 1{,}7\,H$ o,

(Si L se opone a H)
$U = 1{,}4\,D + 1{,}7\,H$ o,

(Si D ó L reducen el efecto de H)
$U = 0{,}9\,D + 1{,}7\,H$

CARGA MUERTA, VIVA , PRESION LATERAL DE LIQUIDOS (A.9. 2. 5.)

$U = 1{,}4\,D + 1{,}7\,L$ o,

$U = 1{,}4\,(D + 1{,}7\,L + 1{,}4\,F)$ o,

(Si D se opone a F)
$U = 0{,}9\,(D + 1{,}4F)$ o,

(Si L se opone a F)
$U = 1{,}4\,(D + 1{,}4F)$ o,

(Si D ó L se oponen a F)
$U = 0{,}90\,(D + 1{,}4F)$

IMPACTO (A. 9. 2. 6.)

En todas ecuaciones se sustituye (L + Impacto) por (L) cuando se quiere considerar el Impacto.

CARGA MUERTA, VIVA, Y ASENTAMIENTOS DIFERENCIALES, FLUENCIA, RETRACCION Y CAMBIOS DE TEMPERATURA*(A.9.2.7.)*

$U = 1{,}4D + 1{,}7L$ o,
$U = 0{,}75(1{,}4D + 1{,}4T + 1{,}7L)$ o,
$U = 1{,}4D + 1{,}4T$

Donde:
- D = Cargas Permanentes (Muertas)
- L = Cargas Variables (Vivas)
- E = Cargas Sísmicas
- W = Cargas de Vientos
- F = Presión Lateral de Líquidos
- H = Presión Lateral de Tierra
- T = Efectos Estructurales Acumulados de Temperatura Fluencia, Retracción y Asentamientos Diferenciales.

6.6 CASOS DE CARGAS PARA EL DISEÑO

Las columnas generalmente están sometidas a solicitaciones de carga axial y momentos y como éstas provienen de las cargas verticales o del sismo en una u otra dirección, se podrán combinar cargas como a continuación se expone en la Tabla 6.I.

TABLA 6. I

CARGAS	SOLICITACIONES		
	Pu	Mux	Muy
CARGA VERTICAL (Mayorada) (V)	$P_v = 1{,}4P_D + 1{,}7P_L$	$M_{ux} = 1{,}4M_{Dx} + 1{,}7M_{Lx}$	$M_{vy} = 1{,}4M_{Dy} + 1{,}7P_{Ly}$
CARGA VERTICAL + SISMO EN DIRECCION X (EX)	$0{,}75\,(P_v + 1{,}9P_{Ex})$	$0{,}75\,(M_{vx} + 1{,}9M_{Ex})$	$0{,}75\,M_{vy}$
CARGA VERTICAL + SISMO EN DIRECCION Y (EY)	$0{,}75\,(P_v + 1{,}9P_{Ey})$	$0{,}75\,M_{vx}$	$0{,}75\,(M_{vy} + 1{,}9M_{Ey})$
CARGA MUERTA (D) + SISMO EN DIRECCION X (EX)	$0{,}9\ P_{Dx} + 1{,}4P_{Ex}$	$0{,}9\ M_{Dx} + 1{,}4M_{Ex}$	$0{,}9\ M_{Dy}$
CARGA MUERTA (D) + SISMO EN DIRECCION Y (EY)	$0{,}9\ P_{Dy} + 1{,}4P_{Ey}$	$0{,}9\ M_{Dy}$	$0{,}9\ M_{Dy} + 1{,}4M_{Ey}$

Donde P_u = Carga axial a compresión último de diseño
M_{ux} = Momento flector último de diseño en dirección X
M_{uy} = Momento flector último de diseño en dirección Y
P_v = Carga axial a compresión por carga vertical mayorada
M_{vx} = Momento flector por carga vertical en dirección X
M_{vy} = Momento flector por carga vertical en dirección Y
P_{Ex} = Fuerza axial a compresión por sismo en dirección X
P_{Ey} = Fuerza axial a compresión por sismo en dirección Y
M_{Ex} = Momento flector por sismo en dirección X
M_{Ey} = Momento flector por sismo en dirección Y

6.7 PREDIMENSIONADO DE COLUMNAS

Posiblemente lo mas importante dentro de la ejecución de un proyecto es la estimación "a priori" de las dimensiones de los miembros de una estructura y en especial de los elementos que transmiten las cargas a las fundaciones, es decir, las columnas, debido a que son ellas las que ocupan espacios en las plantas, por lo tanto disminuyen el área útil, (a diferencia de las vigas que disminuyen altura útil), y porque los distintos métodos de análisis implican el conocimiento de la rigidez de los elementos que componen la estructura y el concepto de rigidez está íntimamente ligado con la geometría o dimensiones, es por eso, que a continuación se expone un método aproximado el cual generará dimensiones en las columnas, que estarán dentro del orden real de las necesidades pero no exactas y que podrían ser mayores o menores, ya que los parámetros definitivos que intervienen en una estructura son muchos.

Cuando se tiene una estructura, lo primero que se conocen son las distancias entre ejes, por lo tanto, como las columnas son puntos obligados de pase de ejes, es posible definir un "Area Contribuyente" o A_{cont} que recibe cada columna, como se ve en la Fig. 6.1.

Se define como "Area Contribuyente" o A_{cont} para la columna 2B en el caso en que sean ejes perfectamente perpendiculares al área rayada que la circunda.

$$A_{cont} = \left(\frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2}\right) + \left(\frac{L_6}{2} + \frac{L_7}{2}\right)$$

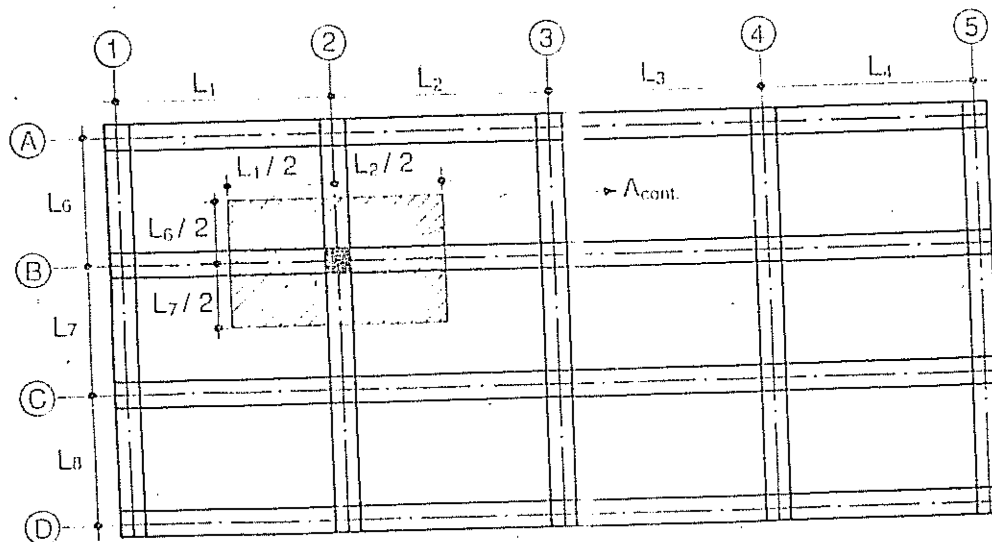


Figura 6.1

Y sobre esa área estará actuante una carga, que expresada unitariamente por m² genera una carga sobre la columna, carga que no es la verdadera actuante ya que sólo representará parte de la definitiva, téngase en cuenta que la verdadera carga será proveniente de cargas verticales más la del sismo en X e Y, sin embargo, a pesar de todo se puede tener una aproximación regular de las cargas en consideración. La finalidad es conocer cuales son las cargas que actúan y en que forma se afectan a la columna, ya que todas las columnas no se comportan iguales.

6.8 CARGAS PARA PREDIMENSIONAR

Las cargas mas conocidas y mas fáciles de usar en este caso serán las verticales que pueden actuar sobre el "Area Contribuyente" o A_{cont} de la columna, siendo éstas:

a) La carga viva del uso de la estructura, la cual se simboliza como W_L, se expresará en K/m².

b) La carga muerta de la losa de piso, incluyendo peso propio de la losa y acabados general, la cual se define como W_D, se expresará en K/m².

c) El peso propio de las vigas en planta que contribuyan sobre la columna la cual se define como W_V, se expresará en K/m², este peso se puede estimar para luces convencionales de edificios de viviendas entre 100 a 150 K/m² sin que sea éste rigurosamente fijo para todos los casos particulares.

d) El peso propio de la columna en la planta, la cual se define como W_C, se expresará en K/m², este peso se puede estimar para luces

convencionales de edificios de viviendas del orden de 100 K/m² sin que sea rigurosa-mente fijo para todos los casos particulares.

e) Cualquier otra carga que no haya haya sido mencionada, se expresará en K/m².

Es posible entonces decir, que la carga que actúa sobre el "Area Contribuyente" o A_{cont} será $W_u = 1{,}4\ (W_D + W_V + W_C) + 1{,}7\ W_L$, de tal forma que se obtiene una "Carga Contribuyente" o P_{cont} .

$$P_{cont} = A_{cont}\ W_u\ n$$

Donde n = número de pisos que soporta la columna.

Se puede determinar el "área gruesa" o A_g de la columna utilizando la siguiente expresión:

$$A_g = \frac{P_{cont}}{Coef \times f'c}$$

Donde Coef. dependerá de las condiciones de carga definitiva a que estará sometida a la columna, es decir, si la columna recibe en mayor proporción carga vertical que momento o viceversa, para eso se diferencian varios tipos de columnas de acuerdo a donde se ubiquen en la estructura, como se muestra en la Fig. 6.2.

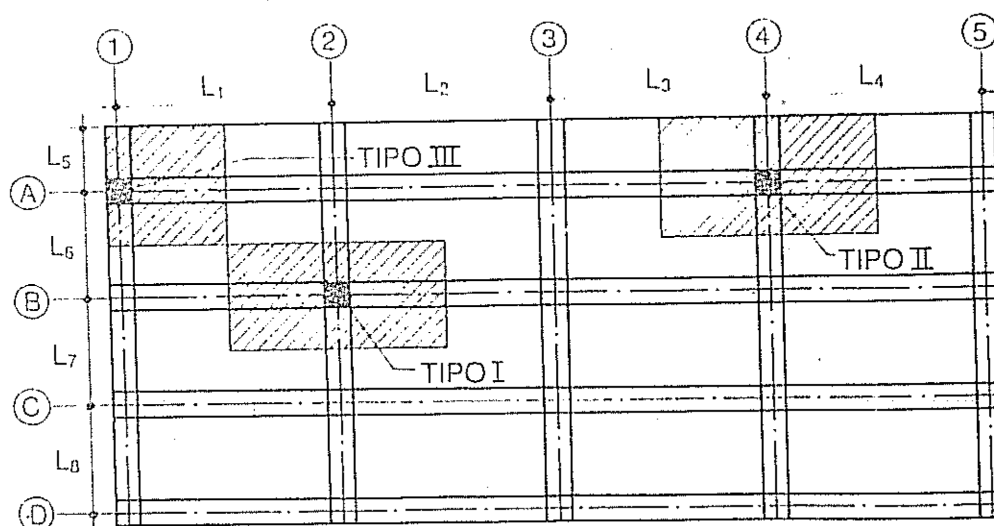


Figura 6.2

TIPO I

También llamadas columnas internas, se encuentran ubicadas después de la primera columna en los pórticos, se puede generalizar que estarán solicitadas por una relación pequeña de momento a carga axial, es decir

con excentricidad bastante baja, se puede aproximar el área de concreto gruesa Ag.

$$Ag = \frac{Pcont}{(0,45 \cong 0,60)\ f'c}$$

TIPO II

También llamadas columnas extremas, por ser extremas de un pórtico pero internas del otro pórtico de la otra dirección que las contiene, estarán solicitadas por momentos respecto a la carga axial en mayor proporción que las anteriores.

$$Ag = \frac{Pcont}{(0,40 \cong 0,50)\ f'c}$$

Ing. Juan F. Díaz C.
ING. CIVIL
CIV 41210

TIPO III

También llamadas columnas esquineras, por ser extremas de los dos pórticos que la contienen, estarán solicitadas por una proporción de momento a carga axial mucho mayor que los otros tipos de columna.

$$Ag = \frac{P}{(0,30 \cong 0,40) f'c}$$

El rango de variación de los coeficientes de los tipos de columnas quedan a criterio del proyectista, ya que es imposible generalizar para todos los casos, porque depende de la zona, sea sísmica o no, de la confiabilidad del constructor, del método del cálculo, del uso de la estructura, magnitud de las sobrecargas y lo más importante del grado de similitud de las luces del edificio, ya que plantas irregulares obligan a tomar dimensiones de columnas más por problemas de rigidez en sus miembros que por resistencia, en conclusión, éstas expresiones sólo dan una aproximación para después ajustarlas a las verdaderas dimensiones requeridas por la solicitaciones que estos miembros van a soportar.

6.9 PROBLEMAS DE PREDIMENCIONADO DE COLUMNAS

6.9.1 EJERCICIO Nº 1

Se desea conocer las dimensiones que tendrían las columnas indicadas en el nivel P. B. de un edificio como el indicado en la Fig. 6.3, si se tienen

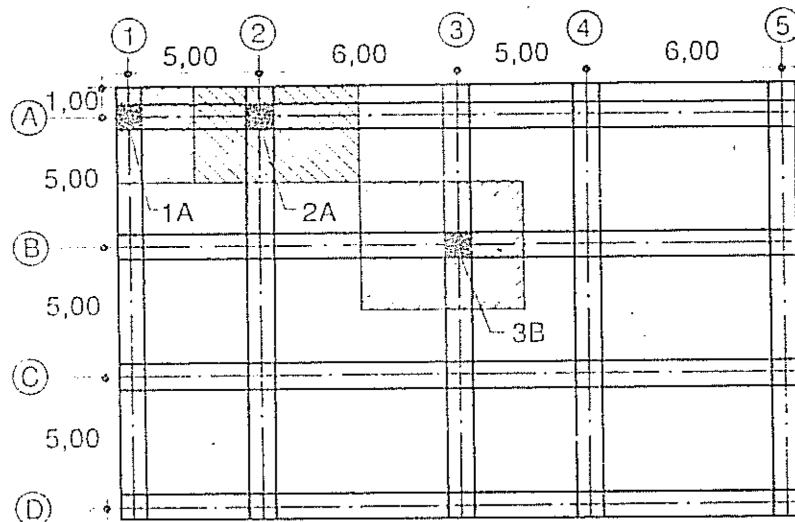


Figura 6.3

diez pisos típicos más el techo, las cargas en los entrepisos son:

$W_D = 500$ K/m² y $W_L = 175$ K/m², en los entrepisos.

$W_D = 350$ K/m² y $W_L = 100$ K/m², en el techo.

Utilizar concreto $f_c' = 210$ K/cm²

Determinación de las cargas de trabajo.
$W_u = 1,4\,(W_D + W_v + W_c) + 1,7\,W_L$

Para entrepisos
$W_u = 1,4\,(500 + 100 + 100) + 1,7 \times 175 = 1.278$ K/m²

Para techo
$W\acute{u} = 1,4\,(350 + 100 + 100) + 1,7 \times 100 = 940$ K/m²

Para la columna 3–B, del tipo interna.

$$A_{cont} = \left(\frac{6}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\right) = 27,5 \text{ m}^2$$

$P_{cont} = P_{cont}$ (1 al 10) + P_{cont} (techo) = $A_{cont}\,W_u\,n + A_{cont}\,W_u'$

Dondc, W_u = Carga de entrepisos 1 al 10 = 1.278 K/m².

W_u' = Cargas de techo = 490 K/m².

n = 10 pisos

$P_{cont} = 27,5 \times 1.278 \times 10 + 27,5 \times 940 = 377.300$ Kg

Area total de concreto aproximada requerida en la columna 3 – B

$$A_g = \frac{377.300}{0{,}55 \times 210} = 3.267 \text{ cm}^2$$ => Se toma columna de 40 x 60 cms.

Para columna 1–A , del tipo esquinera.

$$A_{cont} = \left(\frac{5}{2}+1\right)\left(\frac{5}{2}\right) = 8,75 \text{ m}^2$$

$$P_{cont} = 8,75 \times 1.278 \times 10 + 8,75 \times 940 = 120.050 \text{ Kg.}$$

Area total de concreto aproximada requerida en la columna

$$A_g = \frac{120.050}{0{,}35 \times 210} = 1.633 \text{ cm}^2$$ => Se toma columna de 40 x 40 cms.

Para columna 2–A, del tipo extrema.

$$A_{cont} = \left(\frac{5}{2}+\frac{6}{2}\right)\left(\frac{5}{2}+1\right) = 19{,}25 \text{ m}^2$$

$$P_{cont} = 19,25 \times 1.278 \times 10 + 19,25 \times 940 = 264.110 \text{ Kg.}$$

Area total de concreto aproximada requerida en la columna 2 – A

$$A_g = \frac{264.110}{0{,}45 \times 210} = 27{,}25 \text{ cm}^2$$ => Se toma columna de 40 x 70 cms.

6.9.2 EJERCICIO Nº 2

Suponiendo que el edificio mostrado en la planta de la Fig. 6.4 se han determinado las dimensiones de las columnas por el método anterior, se quiere saber si son correctas estas medidas para que cumpla con los requisitos mínimos de normas. Las dimensiones se indican en los pórticos, se utilizará el método de distribución de fuerzas sísmicas por análisis estático.

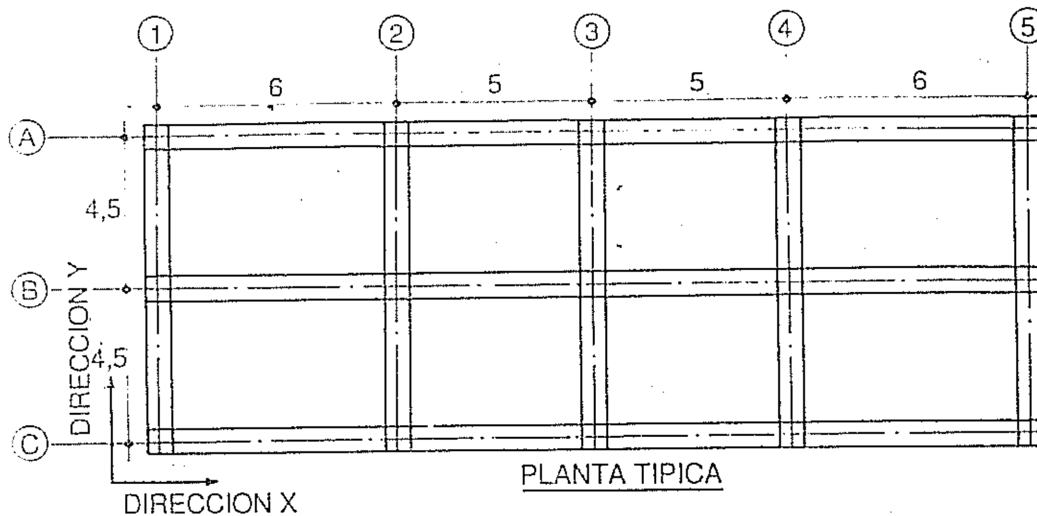


Figura 6.4

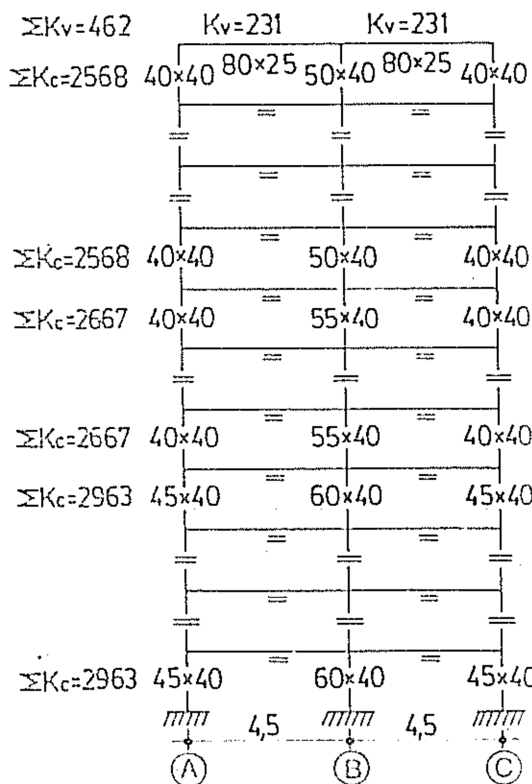


Figura 6.5

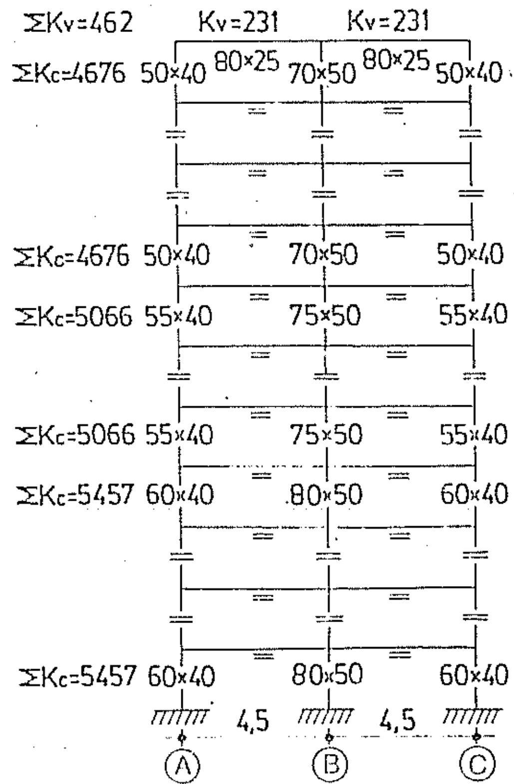


Figura 6.6

PORTICOS AX, CX

ΣKv=2292 Kv=521 Kv=625 Kv=625 Kv=521

ΣKc=6210 40x40 30x50 40x50 30x50 40x50 30x50 40x50 30x50 40x40

ΣKc=6210 40x40 40x50 40x50 40x50 40x40

ΣKc=7742 40x40 40x55 40x55 40x55 40x40

ΣKc=7742 40x40 40x55 40x55 40x55 40x40

ΣKc=10250 40x45 40x60 40x60 40x60 40x45

ΣKc=10250 40x45 40x60 40x60 40x60 40x45

6 5 5 6

(1) (2) (3) (4) (5)

PORTICO BX

ΣKv=2292 Kv=521 Kv=625 Kv=625 Kv=521

ΣKc=18966 40x50 30x50 50x70 30x50 50x70 30x50 50x70 30x50 40x50

ΣKc=18966 40x50 50x70 50x70 50x70 40x50

ΣKc=23639 40x55 50x75 50x75 50x75 40x55

ΣKc=23639 40x55 50x75 50x75 50x75 40x55

ΣKc=29037 40x60 50x80 50x80 50x80 40x60

ΣKc=29037 40x60 50x80 50x80 50x80 40x60

6 5 5 6

(1) (2) (3) (4) (5)

Figura 6.7

Determinación del cortante en el piso "T"

NIVEL	Pi (T)	h_i (mt)	$P_i h_i$	Fi (T)	Ti (T)
Techo	180	29,70	5.346	20,19	20,19
10	240	27,00	6.480	24,47	44,66
9	240	24,30	5.832	22,03	66,69
8	240	21,60	5.184	19,58	86,27
7	240	18,90	4.536	17,13	103,40
6	240	16,20	3.888	14,68	118,08
5	240	13,50	3.240	12,24	130,32
4	240	10,80	2.592	9,79	140,11
3	240	8,10	1.944	7,34	147,45
2	240	5,40	1.296	4,89	152,34
1	240	2,70	648	2,45	154,79
P.B		0	0	0,00	154,79

Σ Pi = 2.580 T. ΣPi hi = 40.986 T–m

c = 0,06 g => Coeficiente de Aceleración Sísmica.

$E = 21.000\sqrt{f'c} = 21.000\sqrt{210} = 304.319$ K/cm².

ΣPi = 2.580 T

ΣPi hi = 40986 T - m.

$$F_i = c\,\Sigma P_i \times \frac{P_i h_i}{\Sigma P_i h_i} = 0{,}06 \times 2.580\ \frac{P_i h_i}{40.986}$$

ANALISIS EN DIRECCION " X "

Nivel	Ti (T)	Kc (cm^3)	Kv(cm^3)	K (10^{-3})	$\frac{Th^2}{24E}$	Δ (cm)	$\frac{\Delta}{h} x 1000$
Techo	20,19	31.386	6.876	3,545	201,52	0,0714	0,26
10	44,66	31.386	6.876	3,545	445,76	0,1580	0,58
9	66,69	31.386	6.876	3,545	665,65	0,2359	0,87
8	86,27	31.386	6.876	3,545	861,08	0,3052	1,13
7	103,40	39.123	6.876	3,545	1032,06	0,3658	1,35
6	118,08	39.123	6.876	3,545	1178,59	0,4178	1,54
5	130,32	39.123	6.876	3,545	1300,76	0,4611	1,70
4	140,11	49,537	6.876	3,545	1398,48	0,4957	1,83
3	147,45	49.537	6.876	3,545	1471,73	0,5217	1,93
2	152,34	49.537	6.876	3,545	1520,55	0,5390	1,99
1	154,79	49.537	6.876	1,312	1545,00	0,202	0,75
P.B	154,19				0,00	0,00	0,00

Claramente se observa que en piso 1 la desplazabilidad es casi del 2‰ lo cual es la máxima requerida por norma, con este ejemplo se requiere destacar que no sólo haber dimensionado los elementos es suficiente, ya que estas dimensiones estarían fuera de normas, en el caso del problema, se solucionaría todo haciendo un aumento de sección en las vigas si es posible, y en último caso de las columnas.

Como es en la dirección de cargas en la cual se sobrepasa la desplazabilidad límite, lo mas recomendable es aumentar la sección de las vigas, pero antes se debe consultar al arquitecto ya que es posible que las alturas de las vigas sean críticas y sería perjudicial aumentar altura al edificio, éste tipo de solución es delicado en todo caso se debe hacer con el consenso de los profesionales que involucra el proyecto.

Expresiones de los desplazamientos de piso.
En P.B.

$$\Delta_{PB} = \frac{Th^2}{24\,E}\left(\frac{2}{\Sigma K_c} + \frac{1}{\Sigma K_{vs} + \frac{\Sigma K_c}{12}}\right)$$

En cualquier piso.

$$\Delta_i = \frac{Th^2}{24\,E}\left(\frac{2}{\Sigma K_c} + \frac{1}{\Sigma K_{vs}} + \frac{1}{\Sigma K_{vi}}\right)$$

Donde: ΣK_{vs} = Sumatoria de la rigidez de vigas superiores en el piso

ΣK_{vi} = Sumatoria de la rigidez de vigas inferiores en el piso

ΣK_c = Sumatoria de la rigidez de las columnas en el piso

Además es necesario aquí destacar que lo sano es chequear el predimensionado con desplazabilidades hasta un límite de 1,5‰ ya que las cargas de corte T aquí mencionadas son una parte de las verdaderas, ya que no se estudia aquí el incremento de corte originado por la torsión en la planta, es por eso que no es conservador el valor de 1, 5‰. Se determinan las dimensiones que necesitan las columnas o las vigas para que la desplazabilidad se mantenga en 1,5‰ y así dejar margen para el incremento que origina la torsión en planta.

Diseñando para el valor mayor valor de la desplazabilidad lo cual ocurre en el piso 2.

$$\Delta_{1-2} = \frac{\alpha\, h}{1.000} = \frac{1,5 \times 270}{1.000} = 0,405 \text{ cm.}$$

$$\Delta_{1-2} = \frac{Th^2}{24\,E}\left(\frac{2}{\Sigma K_c} + \frac{1}{\Sigma K_{vs}} + \frac{1}{\Sigma K_{vi}}\right)$$

Dejando fijas las dimensiones de las vigas.

$$\Delta_{1-2} = 0,405 = 1.520,55\left(\frac{2}{\Sigma K_c} + \frac{1}{6876} + \frac{1}{6876}\right) \Rightarrow \text{Despejando } \Sigma K_c$$

Nota: $\frac{Th^2}{24\,E}$ = 1.520,55 se tiene en el cuadro de análisis en dirección X

$\Sigma K_c < 0 \Rightarrow$ No tiene sentido físico.

Esto indica que no es sano aumentar el tamaño de las columnas, lo cual confirma lo dicho anteriormente que lo conveniente es aumentar el tamaño de las vigas.

Dejando fijas las dimensiones de las columnas.

$$0,405 = 1520,55\left(\frac{2}{49.537} + \frac{2}{\Sigma K_v}\right) \Rightarrow \text{Despejando } \Sigma K_v = 8.850 \text{ cm}^3$$

Se chequea a ver si es posible lograr este valor con un incremento de 5 cm. en la altura h de las vigas.

$$Kv = \frac{55^3 x 30}{12}\left(\frac{2}{600} + \frac{2}{500}\right) x\, 3 = 9.150 \text{ cm}^3 > 8.850 \text{ cm}^3. \qquad \text{OK}$$

Se chequea a ver si es posible lograr este valor con incremento del ancho b de las vigas.

$$Kv = \frac{50^3 x 40}{12}\left(\frac{2}{600} + \frac{2}{500}\right) x\, 3 = 9.167 \text{ cm}^3 > 8.850 \text{ cm}^3. \qquad \text{OK}$$

En este caso es mejor aumentar el ancho de la viga.

Conclusión: Las dimensiones de predimensionado son buenas para la dirección X.

ANALISIS EN DIRECCION Y

Diseñando en el piso 2 y fijando $\alpha = 1,5\%$

$\Delta = 0,405$ cm.

$\Sigma Kc = 22.297 \text{ cm}^3$ y $\frac{Th^2}{24\,E} = 1.520,55$ luego

$$\Delta = 0,405 = 1.520,55\left(\frac{2}{22.297} + \frac{1}{\Sigma Kvs} + \frac{1}{\Sigma\, Kvi}\right) \Rightarrow \text{Despejando } \Sigma Kvs = \Sigma\, Kvi$$

$\Sigma\, Kvs = \Sigma\, Kvi = 11.321 \text{ cm}^3$

Como son vigas planas de alto 25 cm. se busca el nuevo ancho "b" de viga que satisfaga a esa rigidez.

$$\Sigma Kv = \frac{b\, x\, 25^2}{12}\, x \left(\frac{2}{4,5}\right) x\, 5 = 11.321 \Rightarrow b = 97 \text{ cm.} < 100 \text{ cm.}$$

Se concluye que las dimensiones de las columnas son buenas.

CAPITULO VII

Fundaciones

7.1 INTRODUCCION

El tema fundaciones es muy amplio y generalizado, tanto que es una especialidad en ingeniería, sin embargo, por ser las fundaciones unas estructuras que se construyen en concreto armado se introduce su estudio desde el punto de vista de comportamiento y diseño de las mismas. En líneas generales se puede definir "fundación" como un elemento más de la estructura cuya función es la transmisión de esfuerzos al terreno generado por las cargas exteriores aplicadas a la estructura.

En razón de la amplitud de la definición, se puede dividir las fundaciones en dos grandes tipos; fundaciones indirectas y fundaciones directas.

7.2 FUNDACIONES INDIRECTAS

Se usan cuando la capacidad resistente del suelo es baja y un suelo compresible, para transmitir carga al terreno sin asentamientos diferenciales excesivos que afecten a los elementos estructurales, se requieren cuando es necesario llevar carga a estratos inferiores mas resistentes o a través de agua, trabajando las fundaciones inmediatas por fricción contra el material del suelo o a punta.

7.2.1 VENTAJAS

1.- Permite fundar en terrenos desechados por su baja capacidad resistente.

2.- No se limitan las cargas.

7.2.2 DESVENTAJAS

1.- Necesidad de equipo pesado.

2.- Mas costosas.

7 . 2 . 3 TIPOS DE FUNDACIONES INDIRECTAS

Las fundaciones indirectas se pueden tipificar según sea su técnica constructiva, dividiendose en dos grandes tipos, a saber: pilotes y pilas de gran capacidad, tal como se puede ver en la Fig. 7.1

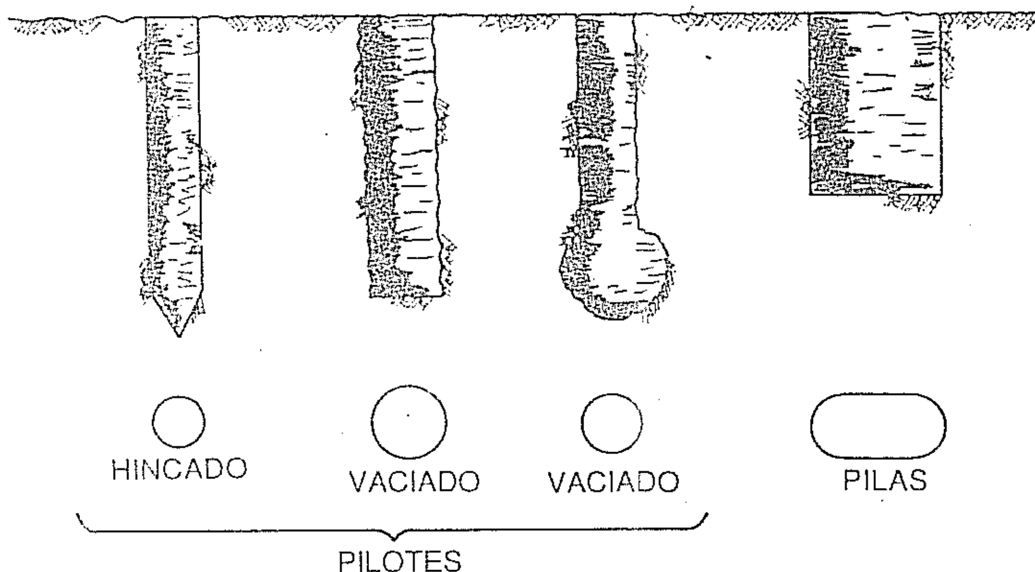


Figura 7.1

7 . 3 FUNDACIONES DIRECTAS

Este tipo de fundaciones supone unas condiciones del suelo en contacto con el concreto de muy buena capacidad resistente y no comprensible, tal que, no se produzcan excesivos asentamientos diferenciales impredecibles, lo cual conllevaría a incrementos de solicitaciones a la estructura.

7 . 3 . 1 VENTAJAS

1.- Necesidad de equipo liviano.
2.- Bajo Costo.
3.- Tiempo de construcción relativamente corto.

7 . 3 . 2 . DESVENTAJAS

1.- No funcional para suelo de baja resistencia.
2.- Cargas aplicadas limitadas.
3.- Profundidad de fundación limitada.

7 . 3 . 3 TIPOS DE FUNDACIONES DIRECTAS

Si se clasifican las fundaciones directas solamente desde el punto de vista de diseño en concreto armado, se pueden clasificar de acuerdo a sus tipos.

7.3.3.1 ZAPATAS AISLADAS

Usadas para soportar una o más columnas con relativa poca distancia entre ellas, tal que no amerite doble zapata, pudiendo ser de diversas formas geométricas de acuerdo a las necesidades, su uso está indicado para estructuras con relativa poca carga y en suelo con gran capacidad de soporte, ver Fig. 7.2.

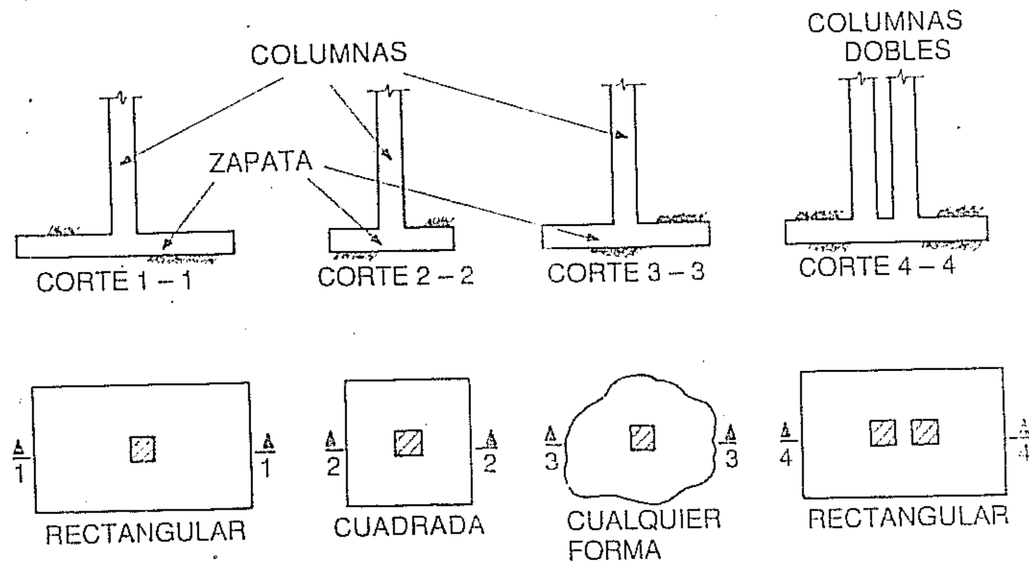


Figura 7.2

7.3.3.2 ZAPATAS CORRIDAS

Usadas para soportar muros de carga o de retención, comportándose muy parecido a las zapatas aisladas, ver Fig. 7.3.

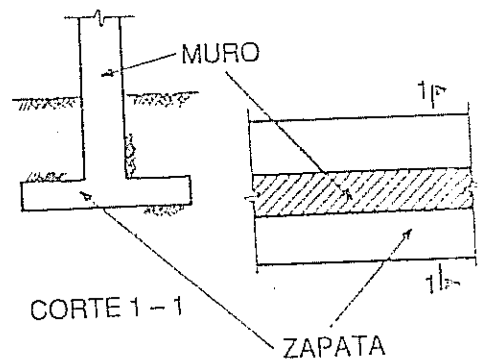


Figura 7.3

7.3.3.3 ZAPATAS COMBINADAS

Surgen por la necesidad de unificar la zapata en razón del solape que tendrían las dos zapatas al ser diseñadas por separado, la geometría de la zapata lo dictan las cargas actuantes, el número de columnas y la separación entre ellas,se usan para suelos con capacidad de soporte bueno y para estructuras cuyas cargas no sean tan grandes por razones de economía, ver Fig. 7.4.

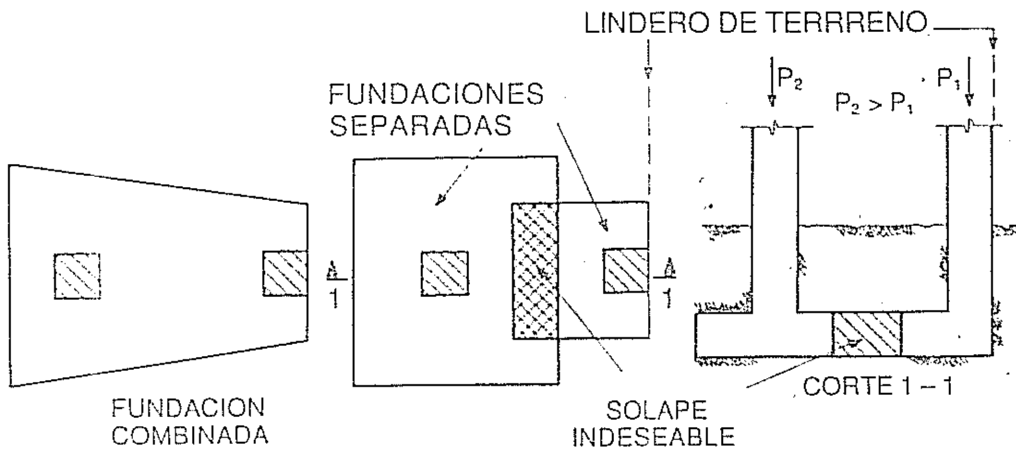


Figura 7.4

7 . 3 . 3 . 4 ZAPATAS UNIDAS

Cuando la separación entre columnas es excesiva o una de las columnas es de lindero, entonces la zapata combinada resultaría de dimensiones muy grandes, y si fuera de lindero se encontraría solicitada por momentos flectores, lo cual resultaría anti-económico por el gran espesor de la zapata que requeriría, en este caso se justifican dos zapatas separadas y unidas por un elemento rígido, es decir una viga que transmita el momento de una fundación a otra y al mismo tiempo lo equilibre, éste tipo de fundación no es práctica y su eficacia realmente deja dudas, hay que destacar que la viga que une a las dos zapatas no es viga de riostra, ya que la viga se ubica al nivel de la zapata y además trabaja a flexión, su uso no es tan generalizado debido a la concepción de la misma, ver Fig. 7.5.

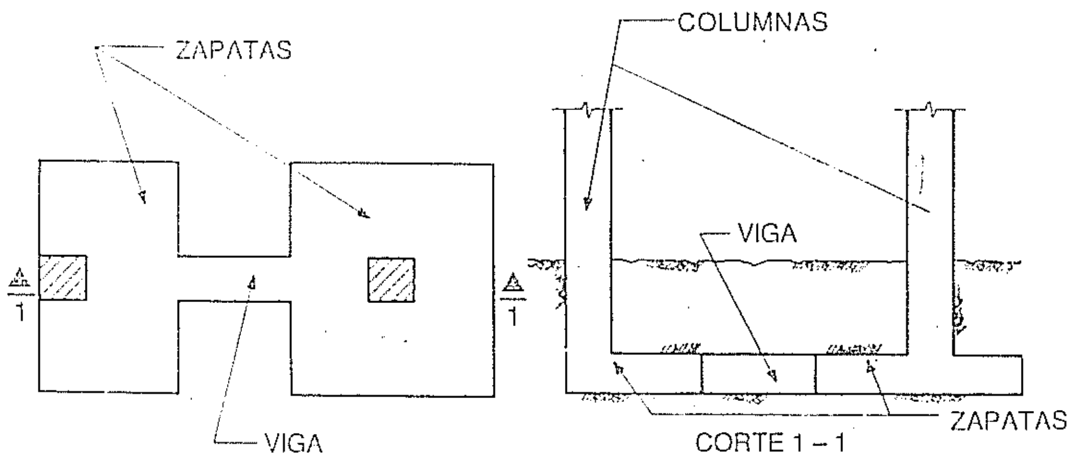


Figura 7.5



7.3.3.5 PLACA DE FUNDACION

Se usa para estructuras en general para pequeñas o grandes cargas para terrenos de baja cohesión como arenas donde no se justifican excavaciones debido al costo de los mismos o en suelos de tipo expansivo, que provocan asentamientos diferenciales que las estructuras con fundaciones aisladas no son capaces de absorber. Consiste en toda una losa de concreto que une las columnas de la estructura, la cual reparte esfuerzo al suelo suponiendo un comportamiento como un elemento rígido, absorviendo esta losa los esfuerzos originados por la flexión y el corte.

Suelen trabajarse estas fundaciones como una gran losa que resiste las cargas del suelo contra ella y su diseño será según la concepción estructural que se convenga, ya sea como una losa macisa del tipo armado en una dirección o dos direcciones, se recomiendan para estructuras de cualquier tipo, sean muy pesadas o livianas, ver Fig. 7.6.

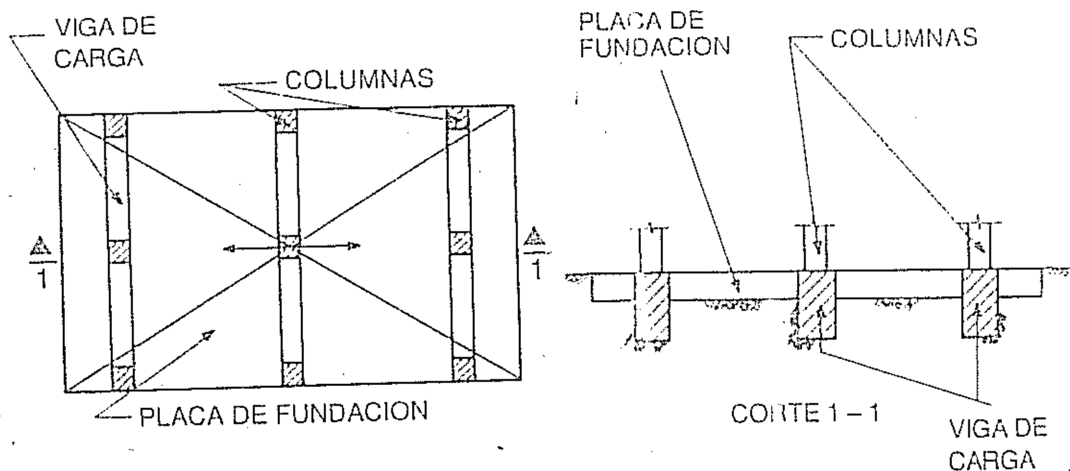


Figura 7.6

7.3.3.6 FUNDACIONES FLOTANTES

Se originan cuando se desea fundar a una gran profundidad y se excava material de suelo para que el peso del material excavado sea igual al peso de la estructura, es decir,no se incrementan nuevas cargas a lo que ya ese suelo soportaba, su diseño es muy parecido a la placa de fundación con estructuras de apoyos, vigas, etc., se recomiendan para estructuras altas que llevan

sótanos para aprovechar la parte de la estructura que se encuentra a desnivel hacia abajo, ver Fig. 7.7.

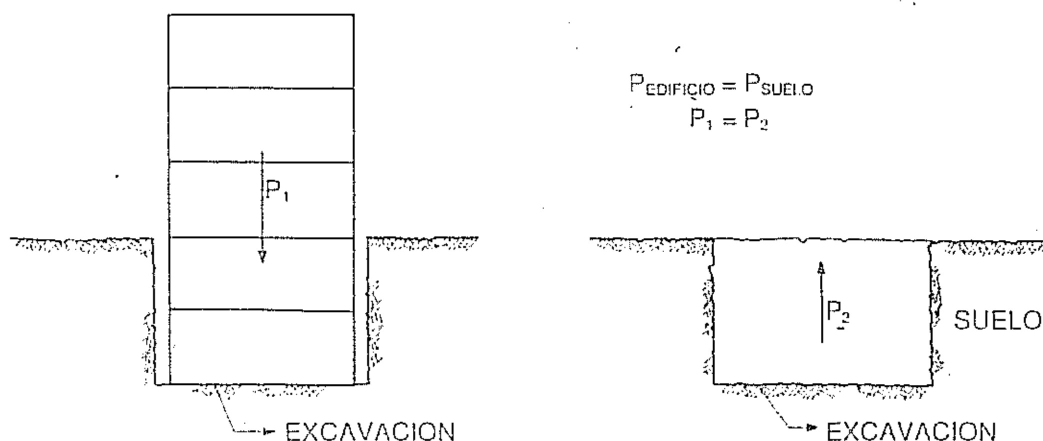


Figura 7.7

7 . 4 FUNDACIONES DIRECTAS CON ZAPATAS

7 . 4 . 1 PROFUNDIDAD DE FUNDACIONES

Las zapatas de las fundaciones deberán ser fundadas debajo de la capa orgánica del suelo, debajo de cualquier relleno no consolidado, debajo de estructuras subterráneas existentes ya sean viejas fundaciones sin uso y debajo de cualquier estrato débil y de baja calidad y en caso de terreno susceptible a heladas debajo de la línea de formación de capas heladas.

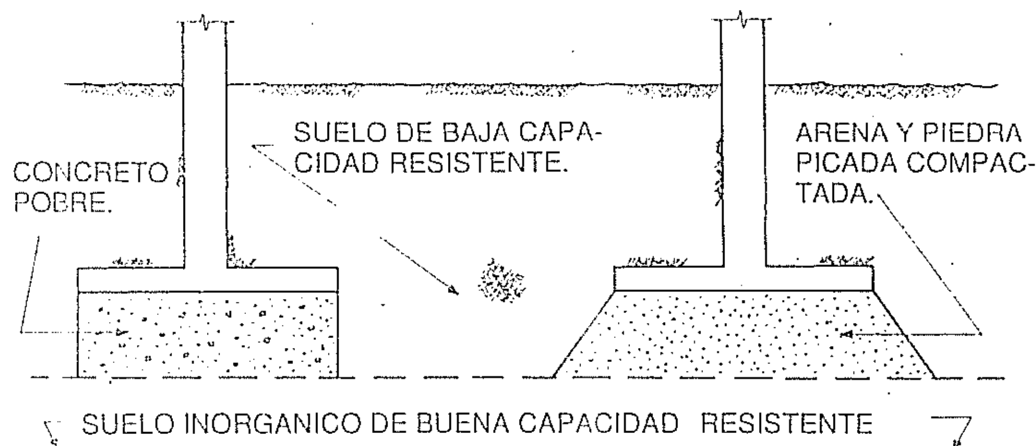


Figura 7.8

Es común conseguir suelos de baja calidad resistente y cuyo estrato es bastante profundo, lo cual impide por razones de economía fundar a éstas profundidades, por lo cual se hace necesario mejorar el suelo inmediato en contacto de la zapata ya sea con concreto pobre compactado debajo de la zapata de fundación y en otros casos con arena o una mezcla de arena y piedra picada, tal como se puede ver en la Fig. 7.8.

Cuando se funda en lugares muy cercanos a instalaciones en uso, se puede correr el riesgo de perturbar la base de sustentación de estas estructuras en razón de la cercanía de una fundación a otra, con el riesgo de sobrecargar suelos con esfuerzos no previstos, es ésta razón por la cual se recomienda fundar según la relación indicada en la Fig. 7.9.

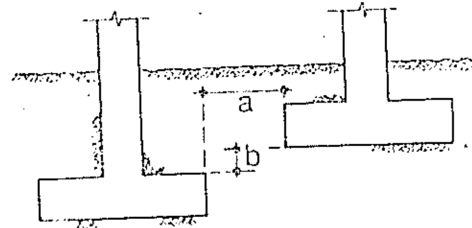


Figura 7.9

Como profundidad mínima no se puede establecer una regla fija ya que es función de las caraterísticas del suelo, sin embargo, es aconsejable fundar debajo de la capa vegetal un metro como mínimo.

7.5 SELECCION DE CARGAS

Una fundación por ser el último eslabón de la estructura sobre la cual se sostiene, se encontrará solicitada por una combinación de cargas que produce la superestructura, es decir, por las siguientes.

7.5.1 CARGAS MUERTAS

Son las provenientes del peso de la estructura y todos los materiales con carácter permanente, como acabados, paredes, equipos fijos.

7.5.2 CARGAS VIVAS

Son las provenientes de cargas verticales que no tienen carácter permanente y que son impuestas a la estructura de acuerdo al uso que se le asigne, es importante destacar que no hay una regla fija sobre cuánto del total de carga viva debe ser considerada para el diseño de una fundación, ya que ésto depende por un lado de la probabilidad del uso total y por el otro del tipo de uso como tal, por ejemplo, en un edificio de viviendas la probabilidad de que la carga viva esté actuante en todos y cada uno de sus pisos es muy baja e inversamente proporcional al número de pisos que la componen,sin embargo, por ejemplo en un estacionamiento para automóviles la totalidad de la carga viva siempre estará actuante casi de manera permanente. En conclusión la verdadera estimación de las sobrecargas o cargas vivas en las fundaciones queda a juicio del proyectista dependiendo del tipo de suelo, tipo de la estructura y su uso.

7 . 5 . 3 CARGAS LATERALES

En este término se puede involucrar todo tipo de cargas provenientes de movimientos sísmicos, presión de agua, presión de tierra y cargas de vientos y en general de equipos pesados como grúas, etc. Las cargas laterales de diseño que se transmiten a una fundación, son proporcionales al número de fundaciones que existan y al método de cálculo utilizado y depende del tipo de fundación que se utiliza.

7 . 5 . 4 COMBINACIONES DE CARGA

Las normas vigentes aceptan las cargas de diseño siguientes

CARGA MUERTA Y VIVA *(A. 9. 2. 1.)*

U = 1,4D + 1,7L

CARGA MUERTA, VIVA Y VIENTO *(A. 9. 2. 3.)*

U = 1,4D + 1,7L o,
U = 0,75 (1,4 D + 1,7 L + 1,7 W) o,
U = 0,9 D + 1,4 W

CARGA MUERTA VIVA Y SISMO *(A. 9. 2. 2.)*

U = 0,75 (1,4 D + 1,7 L +1,9 E) o,
U = 0,9 D + 1,4 E

CARGA MUERTA, VIVA Y EMPUJE DE TIERRA *(A. 9. 2. 4.)*

U = 1,4 D + 1,7 L o,
U = 1,4 D +1,7 L + 1,7 H
(Si D se opone a H)
U = 0,9 D + 1,7 L + 1,7 H o,
(Si L se opone a H)
U = 1,4 + 1,7 H o,
(Si D ó L reducen el efecto de H)
U = 0,9 D + 1,7 H

CARGA MUERTA, VIVA Y PRESION LATERAL DE LIQUIDOS *(A. 9. 2. 5.)*

U = 1,4 D + 1,7 L o,
U = 1,4 (D + 1,7 L + 1,4 F) o,
(Si D se opone a F)
U = 0,9 (D + 1,4 F) o,
(Si L se opone a F)
U = 1,4 (D + 1,4 F) o,
(Si D ó L se oponen a F)
U = 0,90 (D + 1,4 F)

IMPACTO *(A. 9. 2. 6.)*
En todas las ecuaciones se sustituye (L + Impacto) por (L) cuando se quiere considerar el impacto.

CARGA MUERTA,VIVA, Y ASENTAMIENTOS DIFERENCIALES, FLUENCIA,RETRACCION Y CAMBIOS DE TEMPERATURA*(A. 9. 2. 7.)*

$U = 1{,}4\,D + 1{,}7\,L$ o,
$U = 0{,}75(1{,}4\,D + 1{,}4\,T + 1{,}7\,L)$ o,
$U = 1{,}4\,D + 1{,}4\,T$

En todo caso la carga última no podrá ser menor de $U = 1{,}4\,(D + L)$
(No normalizado, opinión del Autor)

Cuando no se tienen las cargas muertas y vivas diversificadas, sino sólo la carga total o de servicio (CS = D + L) se puede considerar que
$U = 1{,}7\,CS = 1{,}7\,(D + L)$
Donde:
D = Cargas Permanentes (Muertas)
L = Cargas Variables (Vivas)
E = Cargas Sísmicas
W = Cargas de Vientos
F = Presión Lateral de Líquidos
H = Presión Lateral de Tierra
T = Efectos Estructurales Acumulados de Temperatura Fluencia, Retracción y Asentamientos Diferenciales.

7 . 6 CAPACIDAD DE RESISTENCIA DEL SUELO

Se define capacidad de resistencia del suelo, como la carga de presión de área o presión desarrollada sobre una superficie sin introducir asentamientos no previstos en la fundación, ésta capacidad resistente no es sólo una propiedad de tipo de suelo, también lo es de las condiciones en que se encuentra ya sea su grado de compactación, humedad, etc.
En otras palabras que no se puede asegurar la verdadera capacidad resistente de un suelo, siendo esto ingerencia de una especialidad dentro de la ingeniería, valores que son aportados después de realizar los estudios de suelo y los ensayos de laboratorio.
Hay que destacar que los parámetros que aporta el laboratorio puede ser la resistencia del suelo última (R_{su}) o la admisible (R_{sadm}), donde la relación entre una y otra es aproximadamente entre 2 y 3, es decir, el factor de seguridad F.S. es:

$$F.S. = \frac{R_{su}}{R_{sadm}} = 3$$

No hay ninguna relación entre el F.S. del suelo y el F.S. del concreto armado, razón por la cual la resistencia del suelo utilizada para diseñar en nuestro caso es la resistencia del suelo admisible, R_{sadm}.

Sólo con el fín exclusivamente académico de tener un cuadro de comparación y escala de magnitud de valores de capacidad resistente en distintos suelos de uso común, se presenta la siguiente relación en la tabla 7.I.

TABLA 7.I RELACION TIPO DE SUELO A RESISTENCIA

TIPO DE SUELO	R_{sadm} (K/cm²)
Arena densidad media	1.00 a 1,25
compactada fina	1.25 a 2,00
Grava	2.00 a 2,50
Grava y arena, mezclada, compactada	3.00 a 4,50
Roca sedimentaria dura	5.00 a 6,00

7 . 7 ASENTAMIENTOS

En forma general se considera que asentamientos uniformes en una estructura no causan daños, salvo que sean excesivos y provoquen daños a los servicios, sin embargo, los asentamientos no uniformes o diferenciales entre columnas provocan nuevas solicitaciones a la estructura para lo cual no estaba diseñada solicitaciones que podrían ser toleradas o no, dependiendo de la magnitud de ellas.

Se acepta en la práctica como valores límites de asentamientos los indicados en la tabla 7.II

TABLA 7.II. VALORES LIMITES DE ASENTAMIENTO DIFERENCIAL

TIPO DE ESTRUCTURA	ASENTAMIENTO cm.
Edificio de vivienda y comerciales	2,50
Edificio industrial	4,00
Depósitos	4,50

7 . 8 DISTRIBUCION DE PRESIONES EN EL SUELO

La presión que es capaz de transmitir la fundación directa al suelo es función del tipo de suelo y del comportamiento de la zapata de fundación, sea ésta rígida o flexible, lo cual se puede ver en la Fig. 7.10.

Distribución de esfuerzos en la base de la zapata rígida en suelos poco cohesivos, se puede observar una dispersión en los extremos.

Estas son las verdaderas distribuciones de esfuerzos de los distintos suelos, sin embargo,con la intención de facilitar el cálculo pero siempre considerándose del lado de la seguridad se acepta una distribución de esfuerzos del tipo lineal en la base de la zapata, siendo uniforme en caso de fundaciones con cargas axiales y no uniformes pero lineal en caso de fundaciones con cargas excéntricas, tal como en las Figs. 7.11 y 7.12 respectivamente.

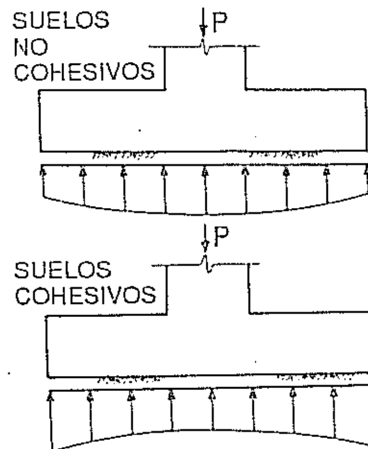


Figura 7.10

7.9 DIMENSIONAMIENTO DE ZAPATA DE FUNDACION

Las fuerzas externas y los momentos aplicados a las zapatas deben transmitirse al suelo que las soporta, sin sobrepasar las presiones admisibles del suelo. *(A. 15. 2. 2.)*

Es decir, conocidas las solicitaciones y la resistencia admisible del suelo, es posible determinar el área de zapata mínima necesaria para que el esfuerzo actuante contra el suelo no sea mayor que R_{sadm}.

Una vez ejecutada la selección de cargas que se transmitirán a la zapata, se pueden identificar los siguientes.

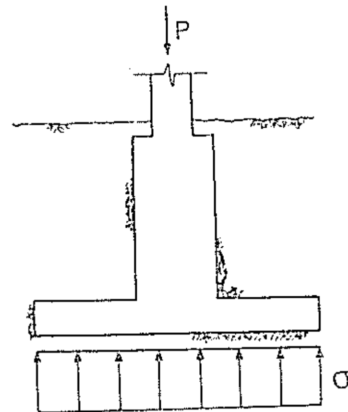


Figura 7.11

P_s = Carga axial de servicio (no mayorada)

P_u = Carga axial última (mayorada)

M_s = Momento flector de servicio (no mayorada)

M_u = Momento flector último (mayorado)

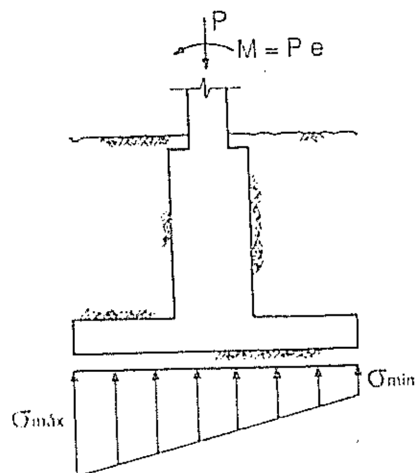


Figura 7.12

Las fundaciones pueden trabajar a carga axial (o suponerse en ésta condición) y trabajar a flexo-compresión, por lo tanto, se desarrollan los dos casos en particular.

7.10 DIMENSIONAMIENTO DE ZAPATA DE FUNDACION CON CARGAS AXIALES

El caso de carga axial pura es un caso ideal, sin embargo, en fundaciones es común hacer este tipo de consideraciones debido a las hipótesis de cálculo y suposiciones asumidas, sin los cuales no se podría aceptar zapatas cargadas axialmente, por ejemplo, si el suelo lo permite se acepta que el material alrededor del pedestal y la zapata será compactado lo suficiente para considerar que toda la estructura de la fundación y el suelo alrededor de ella toman el momento proveniente de las columnas, así mismo, se ayuda a mantener rígida toda esa estructura con unos elementos rigidizantes que conectan ortogonalmente a todas las fundaciones, este elemento se llama viga de riostra, del cual se hablará mas adelante en el Capítulo IX.

Está demás decir, que si la excelente compactación y óptimo suelo no están presentes, no es válido el cálculo como carga axial pura, razón esta para que se manifieste en los cálculos y planos de construcción estas consideraciones, a través de las especificaciones e indicaciones al constructor.

El área de zapata requerida para una R_{sadm} y una carga axial actuante de servicio P_s se puede considerar.

$$A_z = \frac{P_s}{R_{sadm}}$$ Donde, A_z = Area de zapata *(A. 15. 2. 2 .)*
P_s = Carga axial actuante de servicio

Si la fundación es de zapata cuadrada, se tiene:

$$L = \sqrt{A_z}$$ Donde, L = Longitud del lado del cuadrado

Si la fundación es de zapata rectangular, se tiene:

$$A_z = A \times B$$ Donde, A = Dimensión del lado corto de la zapata y
B = Dimensión del lado largo de la zapata

En algunos casos por razones de espacio o linderos se conoce una de las dimensiones de la zapata, lo cual obligará seguramente a la solución con zapata rectangular.

No hay normativa en cuanto a la relación entre A y B, sin embargo se recomienda que $1 \leq B/A \leq 3$ *(No normalizado, opinión del Autor)*

Se recomienda que las dimensiones obtenidas de la zapata, sea L si es cuadrada ó A y B si es rectangular, se redondean a múltiplos de 0,25 mts. por encima, ésto en razón de ser estructuras subterráneas, que las excavaciones no son perfectas y con la finalidad que el área de zapata A_z sea mayor que la requerida por cálculo, para que el suelo trabaje a esfuerzos de diseños menores que los de resistencia del suelo admisible R_{sadm}, tal que se cumpla que:

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_z} \leq R_{sadm}$$ Donde, σ_s = Esfuerzo de servicio al suelo
P_s = Carga axial actuante de servicio

Para mayorar este esfuerzo y poder trabajar las secciones de concreto armado por la Teoría de los Estados Límites o Rotura se utiliza:

$$\sigma u = \frac{Pu}{Az}$$ Donde, σu = Esfuerzo último al suelo

Algunos autores también recomiendan como fórmula general para dimensionar las zapatas:

$$Az = \frac{Ps}{R_{Sadm} - h\gamma_c}$$ Donde, h = Altura total de la sección de la zapata

γ_c = Peso específico del concreto

Esta última expresión es válida también, sin embargo no se debe utilizar en los siguientes casos:

a.- Cuando la estructura tenga cargas que son extremadamente grandes.
b.- Cuando la R_{Sadm} es muy grande.
c.- Cuando la altura de la zapata es pequeña.

7.11 DIMENSIONES DE ZAPATAS DE FUNDACION PARA CARGAS EXCENTRICAS

Para la determinación del área de zapata Az requerida en este caso, se utilizan las ecuaciones de la mecánica racional para secciones homogéneas.

$$\sigma = \frac{Ps}{Az} \pm \frac{Ms\,c}{I}$$

Estando sometidas este tipo de fundaciones a las siguientes solicitaciones las cuales se pueden ver en la Fig. 7.13.

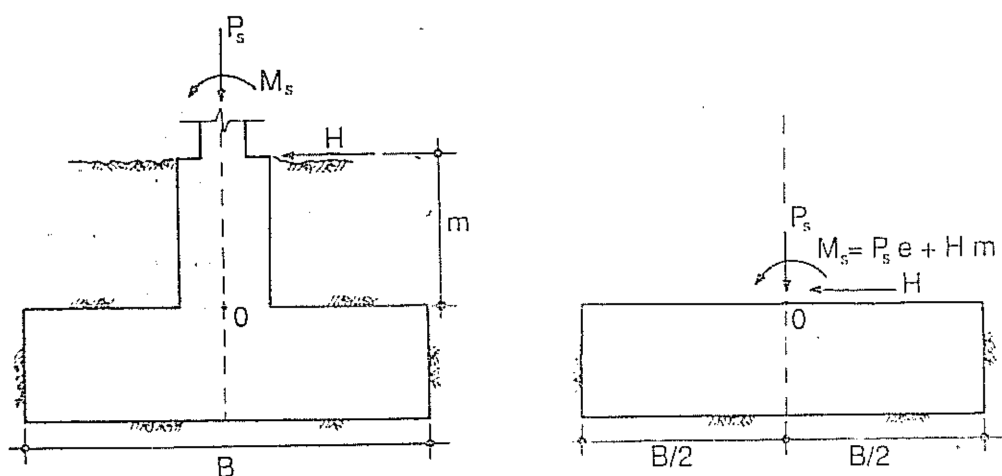


Figura 7.13

Está demás decir que este tipo de fundación no requiere geometría especial y la más usada es la rectangular para la cual se desarrollan las expresiones siguientes:

$$\sigma = \frac{P_s}{A_z} \pm \frac{M_s}{Z} \qquad \text{Donde,} \quad Z = \text{Módulo de sección}$$

$$\text{Si } A_z = AB \qquad Z = AB^2/6 \qquad \text{y} \qquad M_s = P_s\ e$$

Sustituyendo:

$$\sigma = \frac{P_s}{A\,B} \pm \frac{P_s e}{\frac{A\ B^2}{6}} = \frac{P_s}{A\,B} \pm \frac{6\,P_s e}{A\,B^2} = \frac{P_s}{A\,B}\left(1 \pm \frac{6e}{B}\right)$$

$$\sigma_{máx} = \frac{P_s}{AB}\left(1 + \frac{6e}{B}\right) < R_{sadm} \qquad \text{y}$$

$$\sigma_{mín} = \frac{P_s}{AB}\left(1 - \frac{6e}{B}\right) \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \frac{6e}{B} \Rightarrow B \geq 6e$$

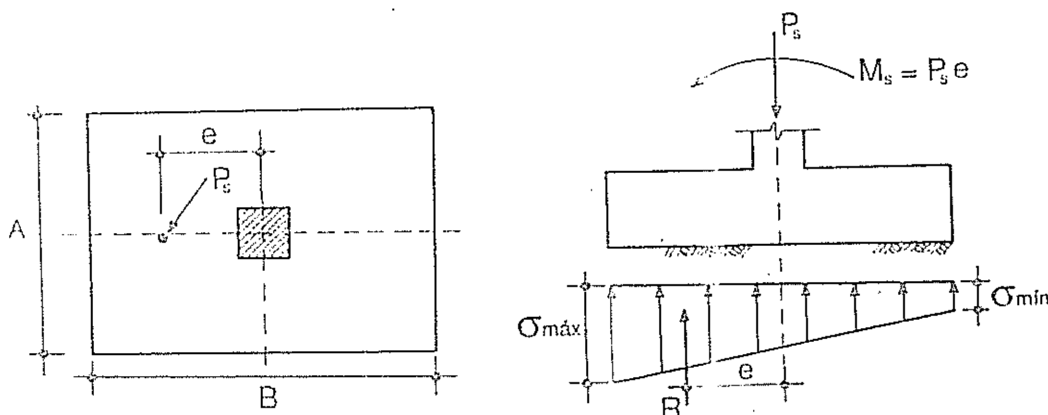


Figura 7.14

Donde B es la menor dimensión requerida en la dirección del momento para no tener tensiones en el suelo, ver Fig. 7.14.

Para no tener tensiones en el suelo resultante debe caer en el tercio central de la zapata, ver Fig. 7.15.

En caso de tener tracción en la base de la zapata debido a que la carga se ubicó fuera del tercio central como en la Fig. 7.16, se diseña la zapata sin considerar la existencia física de la parte de ésta que está a tensión.

De la Fig. 7.16 se obtiene el valor de la resultante R, haciendo $\Sigma F = 0$

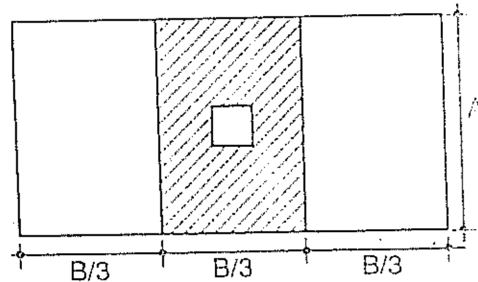


Figura 7.15

$$\text{Resultante} = R = P_s = \frac{3b\,\sigma_{máx}\,A}{2} \Rightarrow \sigma_{máx} = \frac{2R}{3b\,A}$$

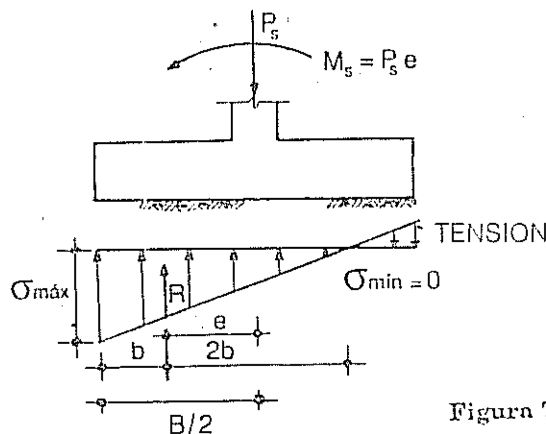
$$\sigma_{máx} = \frac{2P_s}{3b\,A} \quad y \quad e + b = \frac{B}{2} \Rightarrow b = \frac{B}{2} - e$$

Sustituyendo b en la expresión obtenida de $\sigma_{máx}$

$$\sigma_{máx} = \frac{2P_s}{3\left(\frac{B-2e}{2}\right)A} = \frac{4P_s}{3A(B-2e)} \geq R_{Sadm} \quad y \quad \sigma_{mín} = 0$$

Conocido el ancho A de la fundación, la R_{Sadm} y solicitaciones P_s y M_s, se obtiene la dimensión mínima B de la zapata:

$$B \geq \frac{4P_s}{3A\,R_{Sadm}} + 2e$$



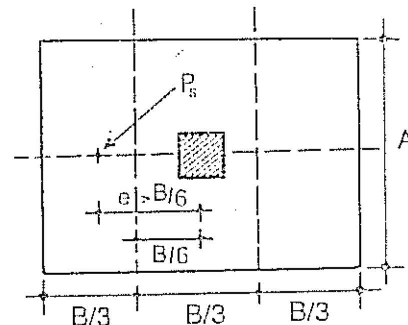


Figura 7.16

7.12 NORMAS Y CRITERIOS PARA EL DISEÑO

1.- RECUBRIMIENTO MINIMO
El recubrimiento mínimo entre el refuerzo y la superficie de contacto con el suelo es 7,0 cm. *(A. 7. 7. 1.)*

2 .- Con la finalidad de hacer el equivalente de un colchón distribuidor de carga se recomienda el uso de una capa de concreto pobre de aproximadamente 7 cm., en estos casos puede disminuirse el recubrimiento e inclusive apoyar el refuerzo directamente, en esa superficie.

(No normalizado, opinión del Autor)

3 .- SECCION EQUIVALENTE

Cuando se tienen columnas o pedestales de concreto de forma distinta a la cuadrada o rectangular, se asume una sección cuadrada equivalente en área para los efectos de localización de las secciones críticas para el cálculo del momento flector, del corte originado por la flexión, adherencia y longitud de desarrollo del refuerzo de la zapata *(A. 15. 3.)*

4 .- AREA DE ACERO MINIMO

No se normaliza porcentaje de acero mínimo por flexión, sin embargo el mínimo acero a colocar será por retracción y cambios de temperatura, definiéndose el porcentaje de acero p como el área de acero al área de la sección total de concreto, o sea $p = As/bh$. *(A. 7. 12. 2.)*

- $p \geq 0{,}0020$ para cabillas corrugada de $fy \leq 3500$ K/cm²
- $p \geq 0{,}0018$ para cabillas corrugadas o malla eletrosoldada de alambre (corrugado o liso) de $fy = 4.200$ K/cm²
- $p \geq \dfrac{0{,}0018 \times 4\,200}{fy}$ para refuerzo de $fy = 4.200$ K/cm² y $= \xi y = 0{,}0035$
- $p \geq 0{,}0014$ en todos los casos.

5 .- SEPARACION ENTRE CABILLAS.

La separación S entre cabillas será la menor de las siguientes relaciones.

- $S \leq \emptyset$ Donde $\emptyset$ = Diámetro nominal de la cabilla *(A. 7. 6. 1.)*
- $S \leq 2{,}5$ cm. *(A. 7. 6. 1.)*
- $S \leq 3\,h$ Donde h = Altura de la zapata *(A. 7. 6. 5.)*
- $S < 45$ cm. *(A. 7. 6. 5.)*

6 .- ALTURA MINIMA DE ZAPATA

La altura útil "d" no será menor de 15 cm. (A. 15. 7.), sin embargo, esta pequeña altura generalmente conlleva a problemas de falla a corte por punzonamiento razón por la cual se ha generalizado en una altura total "h" de zapata mínima de 30 cm.

(No normalizado, opinión del Autor)

7 .- MOMENTOS FLECTORES

Se determinará el momento flector para el diseño de la sección de la zapata.

- En la cara de la columna, pedestal o muro, cuando éstos son de concreto, ver Fig. 7.17. *(A. 15. 4. 2. a.)*

- En la cara de la columna equivalente, cuando la columna o pedestal no es rectangular y es de concreto.
(No normalizado, opinión del Autor)

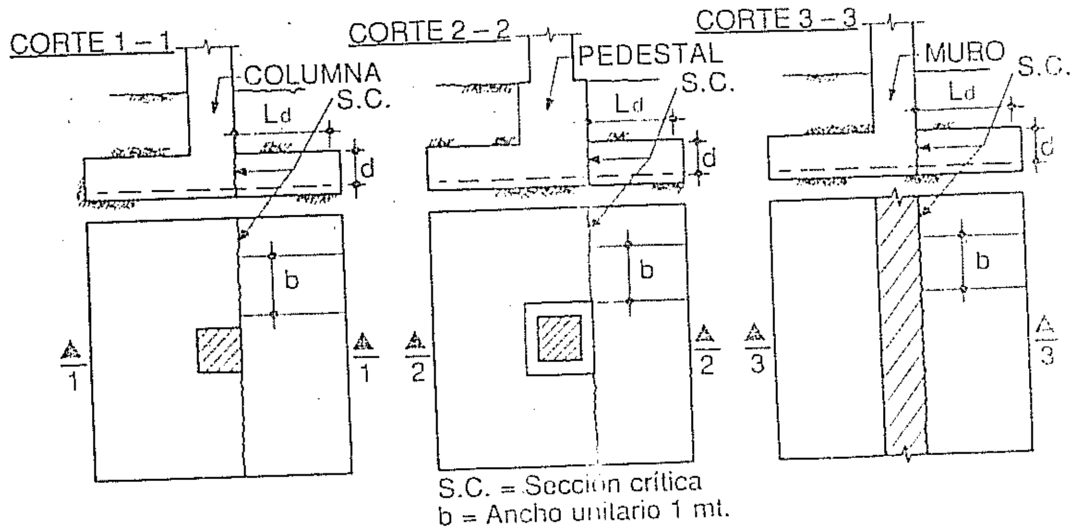


Figura 7.17

- A la mitad entre el eje central y el borde de la columna o el muro, cuando estos elementos son de mampostería, ver Fig. 7.18. *(A.15. 4. 2. b.)*

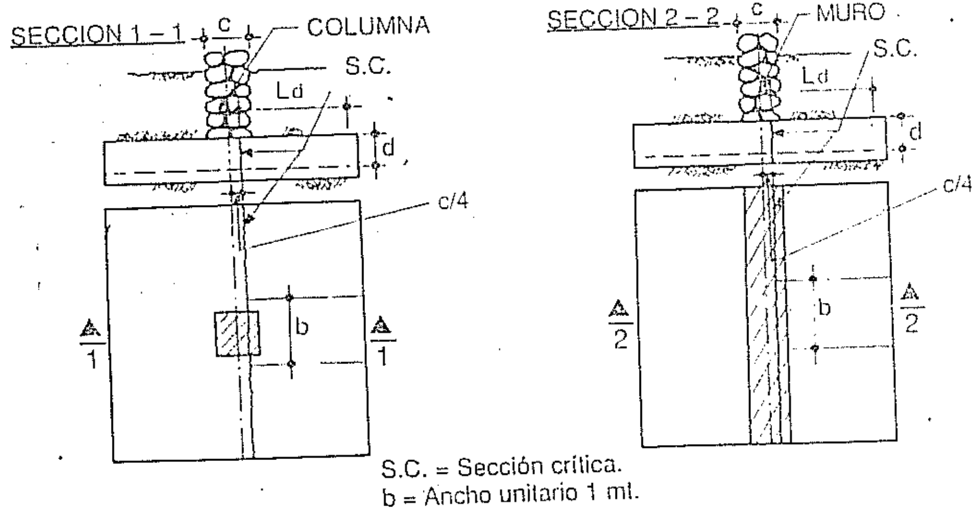


Figura 7.18

- A la mitad entre el borde de la columna metálica y el borde de la plancha base de acero, para zapatas que soportan columnas metálicas sin pedestal, ver Fig. 7.19. *(A. 15. 4. 2. c.)*

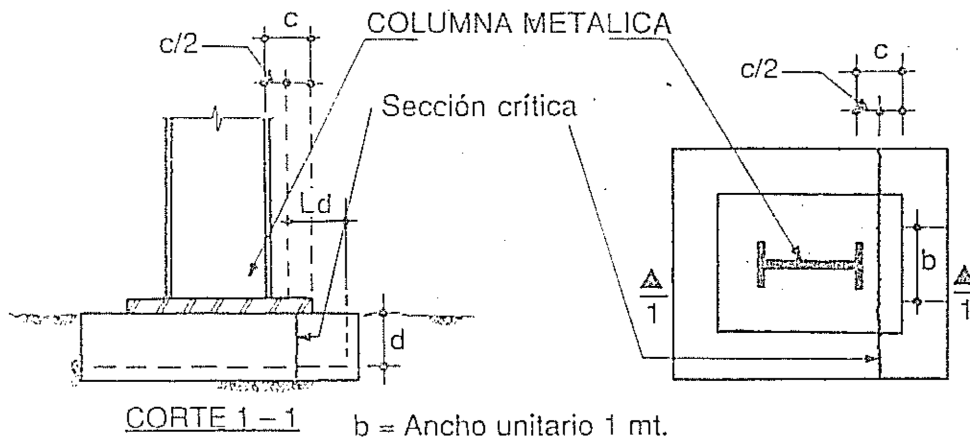


Figura 7.19

8 .- ESFUERZO CORTANTE.

Se determinará el cortante originado por la flexión para el diseño de la sección de la zapata, a una distancia "d" (altura útil de la zapata): *(A. 11. 10. 1. 1.)*

- De la cara de la columna, pedestal o muro, cuando éstos son de concreto, ver Fig. 7.20. *(A. 15. 2.)*

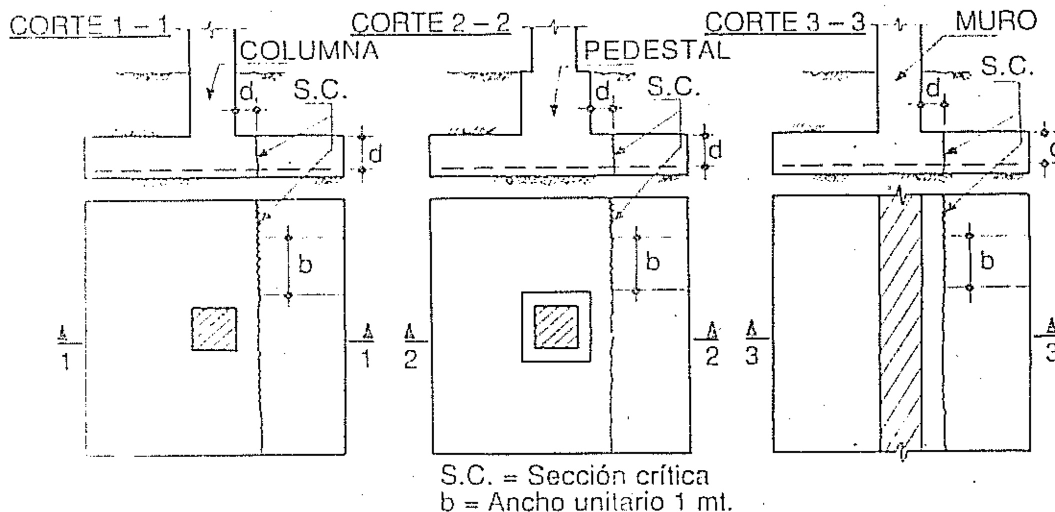


Figura 7.20

- De la cara de la columna equivalente, cuando la columna o pedestal, no son rectangulares y son de concreto.
(No normalizado, opinión del Autor)

- De la mitad entre el eje central y el borde de la columna o muro, cuando éstos son de mampostería, ver Fig. 7.21.
(No normalizado, opinión del Autor)

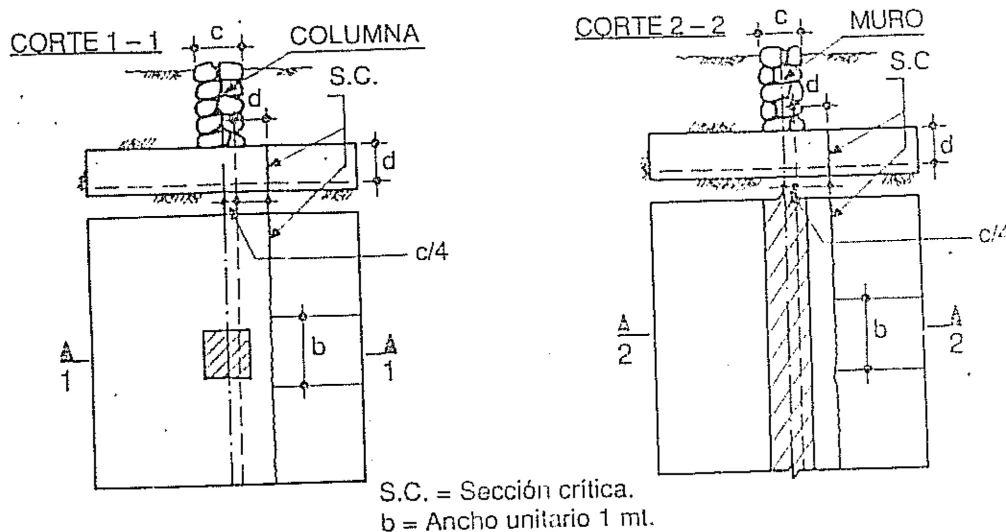


Figura 7.21

- De la mitad entre el borde de la columna metálica y el borde de la plancha de acero, para zapatas que soportan columnas metálicas sin pedestal, ver Fig. 7.22. *(A. 15. 5. 2.)* y *(A. 15. 4. 2. c.)*

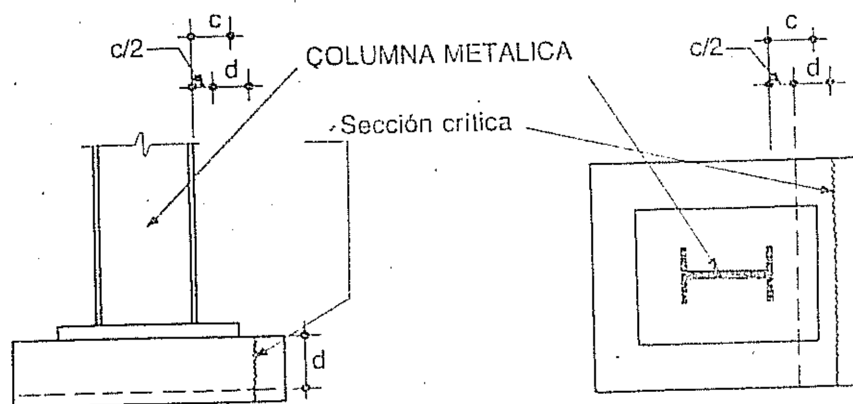


Figura 7.22

- El esfuerzo cortante absorvido por el concreto no será mayor de:
$v_{cu} \leq Ø\ 0,53\ \sqrt{f'c}$ *(A. 11. 3. 1. 1.)*

9 .- PUNZONAMIENTO.
Este es el esfuerzo cortante que se produce no por la flexión sino por el efecto punzante alrededor de la columna sobre la zapata, se determinará este en el área crítica bo a una distancia d/2 alrededor de la columna, pedestal o columna equivalente *(A. 11. 10. 1. 2.)*

Este esfuerzo cortante no será mayor que:

$$v_{cu} = Ø\left(0,53 + \frac{1,06}{ßc}\ \sqrt{f'c}\right) \leq Ø\ 1,06\ \sqrt{f'c}$$

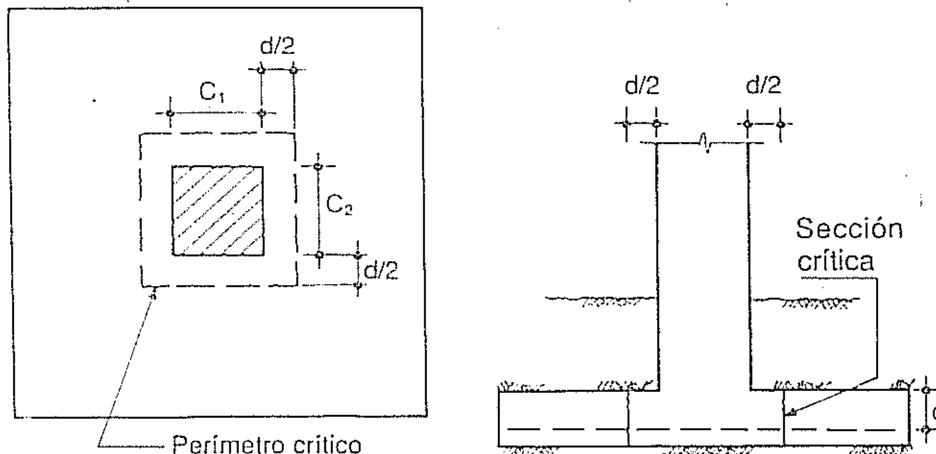


Figura 7.23

Donde, $ßc = \frac{C2}{C1} \geq 1$ y C2 = Lado mayor de la columna

C1 = Lado menor de la columna *(A. 11. 10. 2.)*

10 .- ADHERENCIA Y LONGITUD DE DESARROLLO
- No se permite solape en cabillas mayores de Ø1 3/8 " (#11)
(A. 12. 14. 2. 1.)

- El cálculo de la adherencia y longitud de desarrollo se hará en las secciones definitivas para momento flector y en los planos donde ocurra cambio de sección, ver Figs. 7.17, 7.18 y 7.19.

(A. 15. 6. 3.) y *(A. 15. 4. 2.)*

- La longitud básica de desarrollo a tensión en centímetros será:
  - Para barras de diámetros menores a Ø≤1 3/8" o mas delgadas .... $0{,}006 \frac{Ø f_y}{\sqrt{f'_c}}$

    Pero no menor que .... $0{,}0006\ Ø\ f_y$
  - Para cabillas de Ø 1 3/4"(43.0 mm) .... $0{,}82 \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}}$
  - Para cabillas de Ø 2 1/4"(57,3 mm) .... $1{,}1 \frac{f_y}{\sqrt{f'_c}}$
  - Para alambre corrugado .... $0{,}11 \frac{Ø f_y}{\sqrt{f'_c}}$

    Donde Ø es diámetro de la cabilla y se expresará en centímetros.
    (A. 12. 2. 2.)

- La longitud básica de desarrollo a tensión se multiplicará por los siguientes factores según sean aplicables.
  - Para armaduras superiores * 1,4
  - Para armaduras con $f_y \geq$ de 4.200 K/cm^2 .... $\left(2 - \frac{4200}{f_y}\right)$
  - Para concretos con agregados livianos.
    - Cuando se especifica f_{ct} y el concreto se dosifica de acuerdo con la sección A. 4. 2 .... $1{,}8 \frac{\sqrt{f'_c}}{f_{ct}} \geq 1$
    - Cuando no se especifique f_{ct} :
      - Para concreto "totalmente liviano" 1,33
      - Para concreto "liviano con arena" 1,18
      - Para cuando se utiliza reemplazo parcial de arena puede interpolarse linealmente.

    NOTA: *A los efectos de longitud de desarrollo, se define como armadura superior, a la armadura horizontal que tiene por debajo 30 cm. o más de concreto.

- La longitud básica de desarrollo a tensión afectada por los valores anteriores *(A.10.3.1.)* puede multiplicarse por los siguientes

factores de reducción según sean aplicables:

- Para las armaduras con separación de centro a centro igual o mayor de 15 cm. ubicadas a 8 cm. o más desde la cara del miembro al borde de la barra, medidos en la dirección de la separación...0,8
- Para las armaduras en exceso de las que se requiere por análisis de un miembro.. $\dfrac{A_{S requerido}}{A_{S proporcionado}}$
- Para las armaduras encerradas por zunchos de Ø ≥ 1/4" y con un paso no mayor de 10 cm 0,75

(A. 12. 2. 4.)

- La longitud de desarrollo a tensión L_d no será menor de 30 cm.

(A. 12. 2. 5.)

- La longitud básica de desarrollo a compresión en centímetros será .... $0{,}08 \dfrac{Ø\ f_y}{\sqrt{f'_c}}$

Pero no menor que...0,004 Ø fy

- La longitud básica de desarrollo a compresión puede multiplicarse por los siguientes factores según sean aplicables:
  - Para las armaduras en exceso de las que se requieran por análisis .... $\dfrac{A_{S requerido}}{A_{S proporcionado}}$
  - Para las armaduras encerradas dentro de un zuncho de Ø ≥ 1/4" y con un paso no mayor de 10 cm. 0,75

(A. 12. 3. 3.)

- La longitud de desarrollo a compresión L_d no será menor de 20 cm.

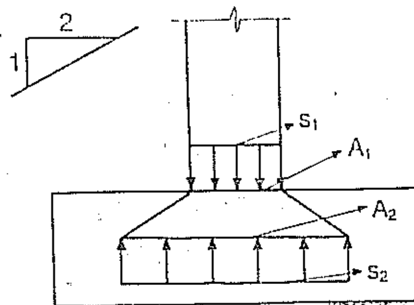
(A. 12. 3. 1.)

- Longitud de desarrollo para grupos de cabillas

La longitud de desarrollo de las barras individuales de un grupo sometidas a tracción o a compresión, será la de la barra individual para grupos de dos barras y será incrementada en un veinte por ciento para grupos de tres barras.

11 .- APLASTAMIENTO

- Los esfuerzos de aplastamiento entre el contacto de la columna de concreto y la zapata o la plancha base metálica y la zapata, no será mayor de Ø 0,85 f'c. *(A. 10. 15. 1.) y (A. 15. 8. 3.)*



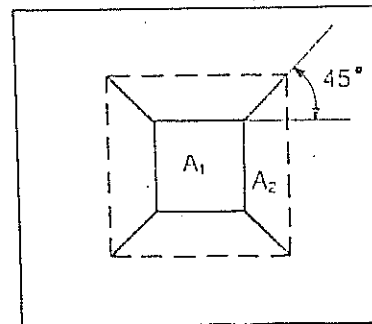


Figura 7.2-

- Cuando la superficie de apoyo sea más ancha que el área cargada en todos los lados, la resistencia de diseño al aplastamiento del apoyo sobre el área cargada, se puede multiplicar por la relación $\sqrt{A2/A1} < 2$, ver la Fig. 7.24. *(A. 10. 15. 1. 1.)*

  Como A2 > A1

  $$\sigma 1 = Ø\ 0{,}85\ f'c \sqrt{\frac{A2}{A1}} > 1{,}2\ f'c \qquad \text{Donde } Ø = 0{,}70$$

  $$\sigma 2 = Ø\ 0{,}85\ f'c \leq 0{,}6\ f'c \qquad \text{Donde } Ø = 0{,}70$$

- Cuando los esfuerzos del aplastamiento exceden a 0,85 $\sqrt{A2/A1}$ se proporcionará refuerzo entre la zapata y la columna y el refuerzo proporcionará el excedente de la fuerza de aplastamiento.

- El reglamento no requiere que todas las cabillas se prolonguen y se anclen a la zapata, pero deben prolongarse dentro de la zapata con una longitud de desarrollo apropiada una cantidad de acero por lo menos igual a $A_s \geq 0{,}005\ A_g$ y un mínimo de cuatro cabillas. *(A. 15. 8. 4. 1.)*

12 .- CABILLAS DE ARRANQUE O ESPIGAS

- Las espigas no pueden tener un diámetro mayor de Ø 1 3/8" *(A. 15. 8. 6.)*

- No se permite solape entre espigas de diámetros mayores a Ø 1 3/8 " (# 11) *(A. 12. 14. 2. 1.)*

- Para cabillas de Ø 1 3/4" ó Ø 2 1/4" que vengan de la columna y que trabajen a compresión, se permite solapar con las espigas que

provengan de la zapata para proporcionar el área de acero requerida, esta área no será menor de 0,005 Ag.

- Las espigas deben introducirse a la columna a una distancia no menor que la longitud de desarrollo de las barras Ø 1 3/4" y Ø 2 1/4" o la longitud de empalme de las espigas, en todo caso la que sea mayor. *(A. 15. 8. 6.)*
- Si se utilizan espigas, el diámetro no excederá al de las barras longitudinales de la columna en más de 5 mm. *(A. 15. 8. 4. 2.)*
- Los arranques o espigas se deben introducir en la zapata a una distancia tal que debe cumplir con la longitud de desarrollo en compresión y no se contará como longitud la de los ganchos, debe cumplir con:

$L_d \geq 20$ cm. *(A. 12. 3. 1.)*

$L_d = \dfrac{0{,}08\ f_y\ Ø}{\sqrt{f'c}} \geq 0{,}004\ Ø\ f_y$ Donde Ø = Diámetro *(A. 12. 3. 2.)*

13 .- DISTRIBUCION DEL REFUERZO

- El acero originado por la flexión sea en zapatas armadas en una dirección (del tipo corridas para muros) o en zapatas cuadradas armadas en dos direcciones, se distribuirá uniformemente a través del ancho total de la zapata, ver Fig. 7.25. *(A. 15. 4. 3.)*
- El porcentaje de acero mínimo por flexión viene dado en función

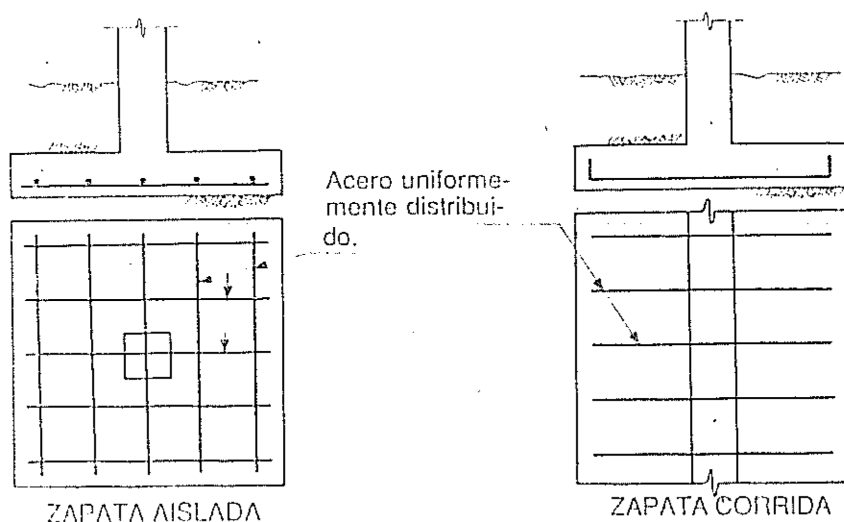


Figura 7.25

del mínimo requerido por retracción y temperatura de acuerdo a la siguiente expresión: $\rho_{mín} = 0{,}0018bh$

- El acero de refuerzo originado por la flexión en zapatas rectangulares armadas en dos direcciones, se distribuirá de acuerdo a las siguientes relaciones.
- El refuerzo en la dirección "larga" se distribuirá uniformemente en el ancho de la zapata. *(A. 15. 4. 4. a.)*
- Para el refuerzo en la dirección corta, éste se concentrará sobre una franja centrada respecto de la columna o pedestal de ancho igual al lado corto de la zapata ver la Fig. 7.26., según la siguiente expresión:

$$A_{s,c/A} = \left(\frac{2}{\frac{B}{A} + 1} \right) A_{st,c} \qquad (A.\ 15.\ 4.\ 4.\ b.)$$

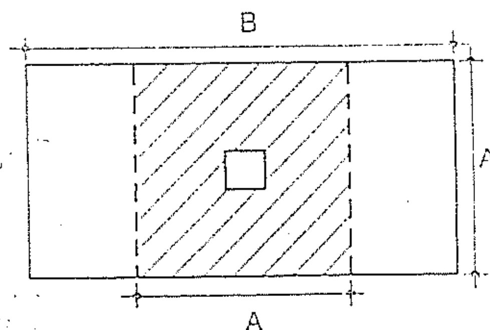


Figura 7.26

Donde,

A = Dimensión corta de la zapata.

B = Dimensión larga de la zapata.

$A_{s,c/A}$ = Area de acero en dirección "corta" concentrado en el ancho A

$A_{st,c}$ = Area de acero total en dirección "corta".

El resto del acero se distribuirá proporcionalmente sobre los dos segmentos externos al ancho de la franja, es decir mitad en cada segmento.

7.13 EJEMPLOS DE CALCULO DE FUNDACIONES.

7.13.1 FUNDACION CUADRADA.

7.13.1.1 EJERCICIO Nº 1

FUNDACION CUADRADA CON COLUMNA O PEDESTAL CUADRADO DE CONCRETO.

Diseñar la fundación para las siguientes cargas y materiales, cuando tiene una columna o pedestal de concreto de 40 x 40 cms.

DATOS

$P_D = 40$ T. $P_L = 20$ T. $R_{sadm} = 2{,}00$ K/cm²

Concreto $f'c = 2110$ K/cm² Acero $f_y = 4.200$ K/cm²

DIMENSIONAMIENTO (Ver Fig. 7.27.a)

$P_u = 1,4\ P_D + 17\ P_L \Rightarrow P_u = 1,4 \times 40 + 1,7 \times 20 = 90$ T.

$P_s = P_D + P_L \Rightarrow P_s = 40 + 20 = 60$ T.

Se asume altura de zapata h = 35 cm., por lo tanto d = 28 cm.

$$A_z = \frac{P_s}{R_{sadm}} = \frac{60.000\ Kg.}{20.000\ K/m^2} = 3\ m^2 \Rightarrow 1,73 \times 1,73$$

Se toma zapata 2,00 x 2,00 mts.

$$\text{Luego } \sigma_s = \frac{P_s}{A_z} = \frac{60.000\ Kg.}{200 \times 200\ cm^2} = 1,5\ K/cm^2 < R_{sadm} \qquad OK$$

$$\sigma_u = \frac{P_u}{A_z} = \frac{90.000\ Kg.}{200 \times 200\ cm^2} = 2,25\ K/cm^2 \Rightarrow \text{Esfuerzo último de diseño } R_{sadm}$$

DISEÑO POR CORTE (Ver Fig. 7.27.a y 7.27.b)

Por norma $\nu_{cu} = \text{Ø}\ 0,53\sqrt{f'c} = 0,85 \times 0,53\sqrt{210} = 6,12\ K/cm^2$

Esfuerzo cortante actuante $\nu_u = \dfrac{\sigma_u l'}{100d} \leq \nu_{cu}$

$$\text{Donde, } \quad l' = \frac{L-c}{c} - d = \frac{2-0,40}{2} - 0,28 = 0,52\ m.$$

$$\nu_u = \frac{22.500 \times 1 \times 0,52}{100 \times 28} = 4,18\ K/cm^2 < \nu_{cu} \qquad OK$$

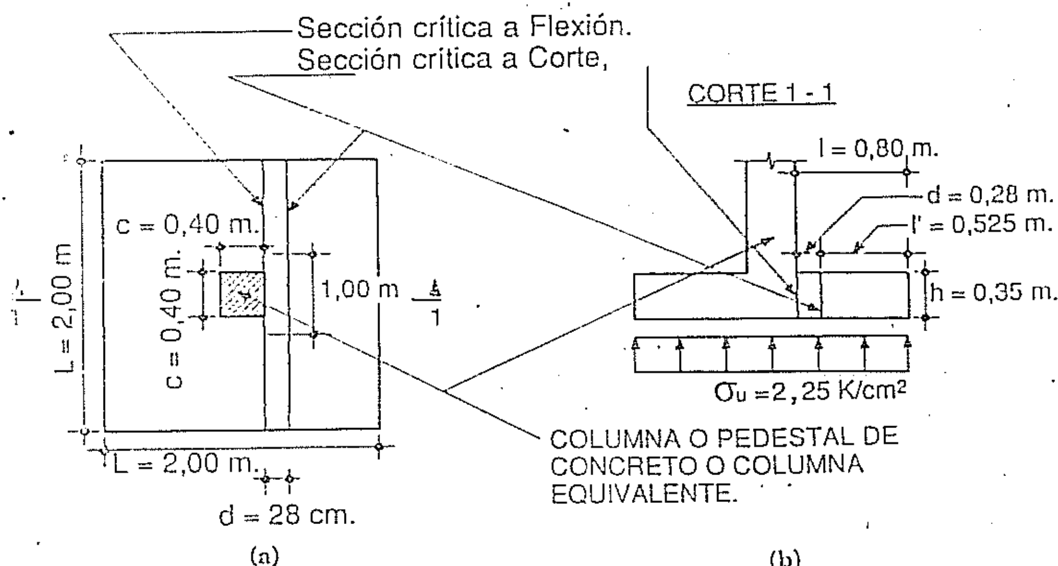


Figura 7.27

DISEÑO POR FLEXION (Ver Fig. 7.27.a y 7.27.b)

$$Mu = \frac{\sigma u\ l^2}{2} \quad \text{Donde,} \quad l = \frac{L - c}{2} = \frac{2 - 0{,}40}{2} = 0{,}80 \text{ m.}$$

$$Mu = \frac{22.500 \times 1 \times 0{,}8^2}{2} = 7.200 \text{ Kg-m.}$$

$$Mru = Rcu\ b\ d^2 = 35{,}13 \times 1 \times 28^2 = 27.542 \text{ Kg-m.} > Mu \qquad OK$$

$$As = \frac{Mu}{\text{Ø}fy\ 0{,}9d} = \frac{7.200}{0{,}9 \times 4.200 \times 0{,}9 \times 0{,}28} = 7{,}56 \text{ cm}^2\text{/m.}$$

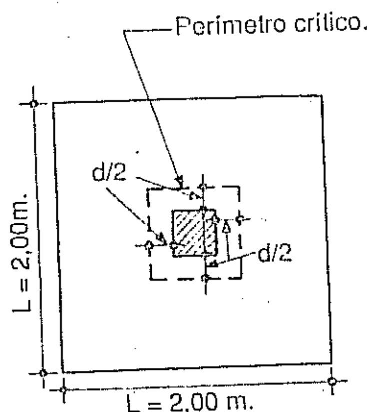
Porcentaje de acero por retracción y temperatura $p = 0{,}0018 \Rightarrow As = pbh$
$As_{mín} = 0{,}0018 \times 100 \times 35 = 6{,}3 \text{ cm}^2\text{/m.} < As_{cálculo}$

$$\text{Separación} = S = \frac{100}{7{,}56} \times 1{,}27 = 16{,}80 \text{ cm.} \Rightarrow \text{Ø}1/2\text{" c/15 cm c/s}$$

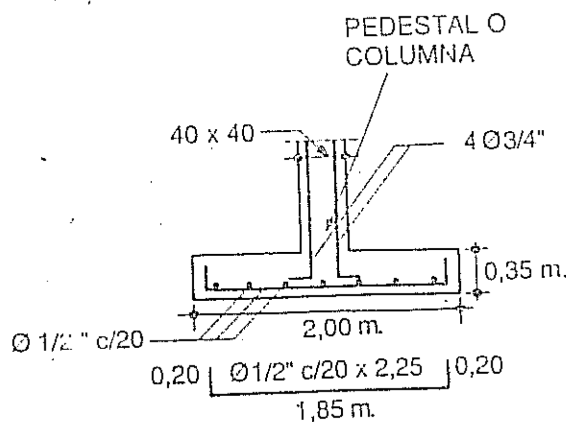
DISEÑO POR PUNZONAMIENTO (Ver Fig. 7.28.a)

$$\text{Por norma} \quad Vcu = \text{Ø}\left(0{,}53 + \frac{1{,}06}{\beta c}\right)\sqrt{f'c} < \text{Ø}\ 1{,}06\sqrt{f'c} \qquad \text{Donde, } \beta c = 1$$

$$Vcu = 0{,}85\left(0{,}53 + \frac{1{,}06}{1}\right)\sqrt{210} = 19{,}59 > 0{,}85 \times 1{,}06\ \sqrt{210} = 13{,}07 \text{ K/cm}^2$$



(a)



(b)

Figura 7.28

El esfuerzo cortante máximo permitido en el concreto $v_{cu} = 13{,}07$ K/cm²
Esfuerzo cortante actuante

$$v_u = \frac{\sigma_u(L^2 - (c + d)^2)}{4(c + d)\, d} \leq v_{cu} = 13{,}07 \text{ K/cm}^2 \quad \text{Donde, } 4(c + d)\, d = \text{Area crítica}$$

$$v_u = \frac{22.500\,(2^2 - (0{,}40 + 0{,}28)^2)}{4(40 + 28)28} = 10{,}45 \text{ K/cm}^2 < 13{,}07 \text{ K/cm}^2 \qquad OK$$

DISEÑO POR ADHERENCIA Y LONGITUD DE DESARROLLO (Ver Fig.7.27.a)

$$L_d = 1{,}4\ \frac{0{,}06 A_s f_y}{\sqrt{f'_c}}$$

$$L_d = 1{,}4 \frac{0{,}06 \times 1{,}27 \times 4.200}{\sqrt{210}} = 30{,}91 \text{ cm.} < \ldots$$

$$\ldots < 0{,}0084\, \varnothing f_y = 0{,}0084 \times 1{,}27 \times 4.200 = 44{,}8 \text{ cm.}$$

Se toma $L_d = 44{,}8$ cm.

Se tiene para desarrollar hasta $L_d = \dfrac{L-C}{2} - r$

$$L_d = \frac{2 - 0{,}40}{2} - 0{,}07 = 0{,}73 \text{ m.} > 44{,}8 \text{ cm.}$$

DISEÑO POR APLASTAMIENTO

Máxima carga permitida por el pedestal

$P_{máx} = \varnothing(0{,}85\, f'_c\, A_1) = 0{,}70\ (0{,}85 \times 210 \times 40 \times 40) = 199.920$ Kg.
Donde, A_1 = Area del pedestal
$P_{máx} = 199{,}9$ T. $> P_u = 90$ T. No sobrepasan los esfuerzos máximos.
Chequeo del aplastamiento de la zapata.

$$F = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = \sqrt{\frac{200 \times 200}{40 \times 40}} = 5 > 2 \Rightarrow F = 2 \quad \text{Donde, } A_2 = \text{Area de la zapata}$$

Máxima con carga permitida a la zapata.

$P_{máx} = F\ \varnothing(0{,}85\, f'_c A_1) = 2 \times 0{,}70 \times 0{,}85 \times 210 \times 40 \times 40 = 399.840$ Kg
$P_{máx} = 399{,}8$ T. $> P_u = 90$ T. *OK*

NUMERO DE CABILLAS REQUERIDAS ENTRE EL PEDESTAL O COLUMNA Y LA ZAPATA

$As_{mín} = 0{,}005\, bh = 0{,}005 \times 40 \times 40 = 8 \text{ cm}^2$
Este acero nunca será menor de 4 cabillas, usar como mínimo 4 Ø3/4"

7.13.1.2 EJERCICIO Nº 2
FUNDACION CUADRADA CON COLUMNA O PEDESTAL CIRCULAR DE CONCRETO

Diseñar la fundación para las siguientes cargas y materiales cuando tiene una columna o pedestal circular de Ø = 60 cm.

DATOS
$P_D = 90$ T. $P_L = 95$ T. $R_{Sadm} = 2{,}50$ K/cm²
Concreto f'c = 210 K/cm² Acero fy = 4.200 K/cm²

DIMENSIONAMIENTO (Ver Fig. 7.29.a)
$P_u = 1{,}4\ P_D + 1{,}7\ P_L = 1{,}4 \times 90 + 1{,}7 \times 35 = 185{,}5$ T.

$P_s = P_D + P_L = 90 + 35 = 125$ T.

$$A_z = \frac{P_s}{R_{Sadm}} = \frac{125.000\ Kg}{25.000\ K/cm^2} = 5\ m^2$$ => Se toma zapata 2,25 x 2,25 mts.

$$\sigma_u = \frac{185.500\ Kg.}{225 \times 225\ cm^2} = 3{,}66\ K/cm^2$$ => Esfuerzo último de diseño.

En este caso se presume que manda el punzonamiento por ser área de zapata grande, columna pequeña y un esfuerzo elevado.

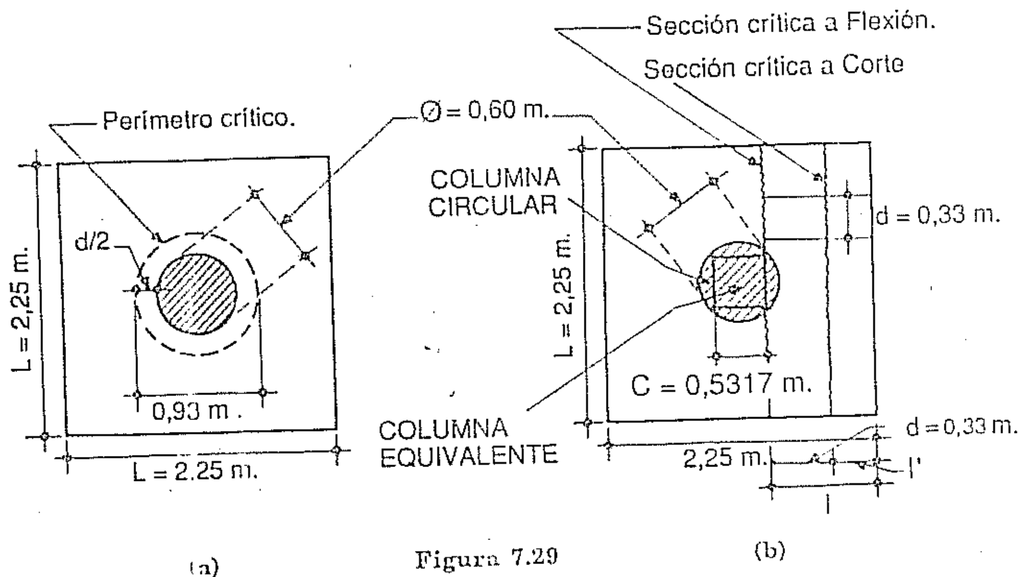


Figura 7.29

DISEÑO POR PUNZONAMIENTO (Ver Fig. 7.29.a)
Por norma

$$v_{cu} = 0{,}85\left(0{,}53 + \frac{1{,}06}{1}\right)\sqrt{210} = 19{,}58 > 0{,}85 \times 1{,}06\sqrt{210} = 13{,}07\ K/cm^2$$

Donde $\beta_c = 1$ por ser columna circular
El esfuerzo cortante máximo permitido en el concreto $v_{cu} = 13{,}07$ K/cm²

Determinación del área crítica

Perímetro Crítico= $P_o = (Ø + d)\,\pi$

Area Crítica = $P_o d = (Ø + d)\,\pi\, d = (60 + d)\,\pi\, d$

Chequeo del esfuerzo cortante actuante

$$v_u = \frac{\sigma_u\,(L^2 - (Ø + d)^2\,\pi/4)}{(Ø + d)\,\pi d} = \frac{\sigma_u\,(L^2 - (Ø + d)^2)}{4(Ø + d)\,d} \leq v_{cu} = 13{,}07 \text{ K/cm}^2$$

Tanteando

Con h = 30 cm., d = 23 cm. => v_u = 20,96 K/cm² *NO*

Con h = 35 cm., d = 28 cm. => v_u = 15,92 K/cm² *NO*

Con h = 40 cm., d = 33 cm. => v_u = 12,51 K/cm² < v_{cu} = 13,07 K/cm² *OK*

Se asume h = 40 cm.

Para el diseño para flexión, corte y adherencia, se asume la columna equivalente igual en área de concreto a la columna cuadrada.

Area de la columna circular igual al área de la columna equivalente cuadrada

$$A_Ø = A_{\square} = \frac{\pi Ø^2}{4} = C^2 \Rightarrow C = \frac{Ø}{2}\sqrt{\pi}$$ Donde, Ø = Diámetro de columna circular
C = Lado de columna cuadrada

Por lo tanto la dimensión C equivalente de la columna cuadrada.

$$C = \frac{60}{2}\sqrt{\pi} = 53{,}17 \text{ cm.}$$

DISEÑO POR CORTE (Ver Figs. 7.29.b y 7.30.a)

Por norma $v_{cu} = 0{,}85 \times 0{,}53\sqrt{210} = 6{,}52$ K/cm²

Esfuerzo cortante actuante

$$v_{cu} = \frac{\sigma_u\, l'}{100\, d} = \frac{36.600 \times 1 \times 0{,}53}{100 \times 33} = 5{,}87 \text{ K/cm}^2 < 6{,}52 \text{ K/cm}^2$$

Donde, $l' = \frac{2{,}25 - 0{,}53}{2} - 0{,}33 = 0{,}53$ m.

DISEÑO POR FLEXION (Ver Figs. 7.29.b y 7.30.a)

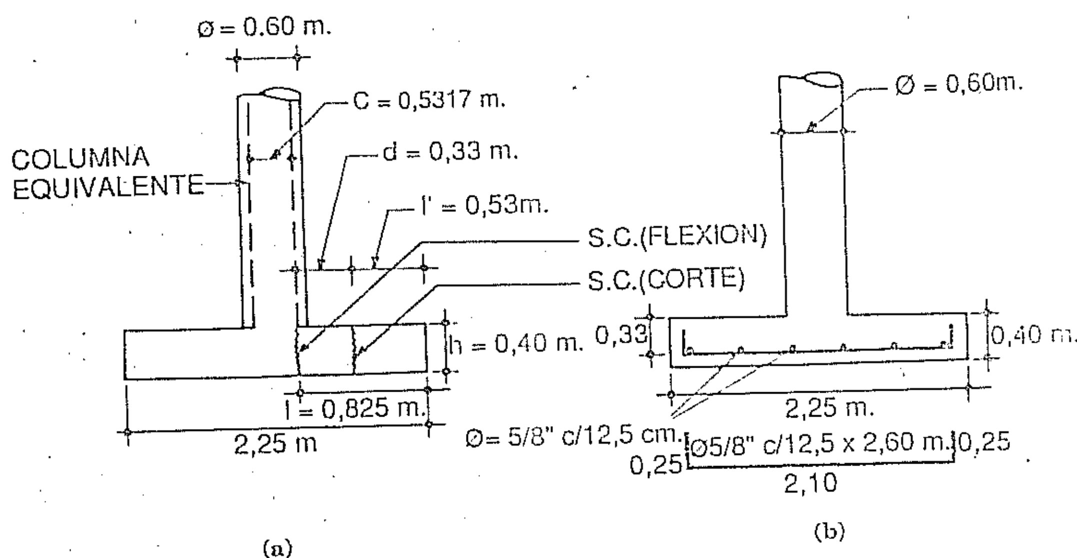


Figura 7.30

El momento actuante es igual en las dos direcciones por ser columna cuadrada equivalente.

$$Mu = \frac{\sigma u\, l^2}{2} = \frac{36.600 \times 1 \times 0{,}825^2}{2} = 12.475 \quad \text{Kg–m.}$$

$$\text{Donde } l = \frac{2 - 0{,}53}{2} = 0{,}825 \text{ m.}$$

Determinación de momento resistente último.

$Mru = 35{,}13 \times 1 \times 33^2 = 30.256$ Kg–m. > $Mu = 12.475$ Kg–m. *OK*

Determinación del área de acero

$$As = \frac{12.455}{0{,}9 \times 4.200 \times 0{,}9 \times 0{,}33} = 11{,}09 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

Determinación del área de acero mínimo por retracción y cambios de temperatura.

$As_{mín} = 0{,}0018\, bh = 0{,}0018 \times 100 \times 40 = 7{,}2 \text{ cm}^2/\text{m.} < As = 11{,}09 \text{ cm}^2/\text{m.}$

Chequeando para refuerzo Ø 1/2"

$$S = \frac{100}{11{,}09} \times 1{,}27 = 11{,}45 \text{ cm.} \Rightarrow Ø\ 1/2" \ \ c/10 \text{ cm.}$$ *NO*

Se toma como diseño Ø 1/2" c/10 cm. c/s

DISEÑO POR ADHERENCIA Y LONGITUD DE DESARROLLO (Ver Figs. 7.29.b y 7.30.a)

$$L_d = 1{,}4\ \frac{0{,}06\ A_s\ f_y}{\sqrt{f'_c}}$$

$$L_d = 1{,}4\frac{0{,}06 \times 1{,}27 \times 4.200}{\sqrt{210}} = 30{,}92 \text{ cm.} < ...$$

$$... < 0{,}0084 Ø f_y = 0{,}0084 x 1{,}27 x 4.200 = 44{,}8 \text{ cm.}$$

Se toma $L_d = 44{,}8$ cm => $L_d = 45$ cm.

Se tiene para desarrollar hasta $L_d = \frac{L - C}{2} - r$

$$L_d = \frac{2{,}25 - 0{,}53}{2} - 0{,}07 = 0{,}79 \text{ m.} > 45 \text{ cm.}$$ *OK*

APLASTAMIENTO

$$F = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = \sqrt{\frac{225 \times 225}{\frac{\pi \times 60^2}{4}}} = 4{,}23 > 2 => F = 2$$

Máxima carga permitida en la zapata.

$$P_{máx} = F\ Ø\ (0{,}85\, f'_c\, A_1) = 2 \times 0{,}75 \times 0{,}85 \times 210\ \frac{\pi \times 60^2}{4} = 757.047 \text{ Kg.}$$

Donde, Ø = 0,75 por ser columna zunchada

$P_{máx} = 757{,}04$ T. > $P_u = 185{,}5$ T. *OK*

7 . 13 . 1 . 3 . EJERCICIO Nº 3

FUNDACION CUADRADA CON COLUMNA O PEDESTAL RECTANGULAR DE CONCRETO

Diseñar la fundación para las siguientes cargas y materiales, cuando tiene una columna o pedestal de 30 x 50 cms.

DATOS

$P_D = 40$ T. $P_L = 20$ T. $R_{Sadm} = 2{,}00$ K/cm²

Concreto $f'_c = 210$ K/cm² Acero $f_y = 4.200$ K/cm²

DIMENSIONAMIENTO (Ver Fig. 7.31.a)

Por ser las cargas iguales al caso del problema 7.13.1.1 se toman las mismas dimensiones de zapata correspondiente.

$A_z = 2{,}00 \times 2.00 = 4\ m^2$ $\sigma_u = 2{,}25$ K/cm² h = 35 cm . d = 28 cm.

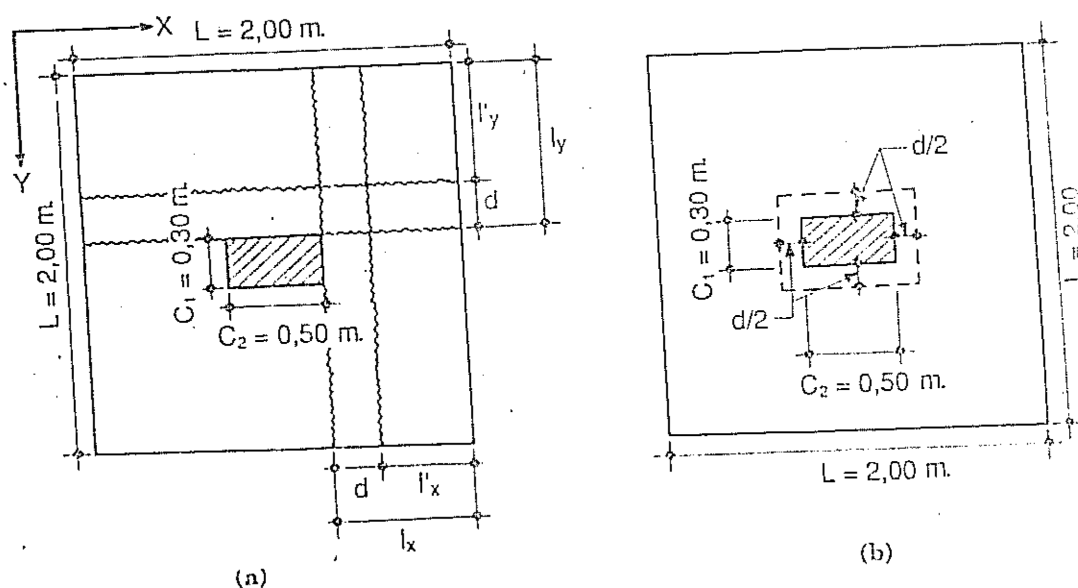


Figura 7.31

DISEÑO POR CORTE (Ver Fig.7.31.a)

Por norma $\nu uy = \dfrac{\sigma u \, l'_y}{100\ d} < \nu cu$ y $\nu ux = \dfrac{\sigma u \, l'_x}{100\ d} < \nu cu$

Donde,

$$l'y = \frac{L - C_2}{2} - d = \frac{2 - 0{,}30}{2} - 0{,}28 = 0{,}57 \text{ m.} \quad y,$$

$$l'x = \frac{L - C_1}{2} - d = \frac{2 - 0{,}50}{2} - 0{,}28 = 0{,}47 \text{ m.}$$

Chequeo del esfuerzo cortante actuante

$$\nu uy = \frac{22.500 \times 1 \times 0{,}57}{100 \times 28} = 4{,}59 \text{ K/cm}^2 < \nu cu \qquad OK$$

$$\nu ux = \frac{22.500 \times 1 \times 0{,}47}{100 \times 28} = 3{,}77 \text{ K/cm}^2 < \nu cu \qquad OK$$

DISEÑO POR FLEXION (Ver Fig.7.31.a)
Hay momentos diferentes en las dos direcciones debido a las diferencias de dimensiones de la zapata.

$$Muy = \frac{\sigma u \, l_y^2}{2} \qquad y \qquad Mux = \frac{\sigma u \, l_x^2}{2}$$

Donde,

$$l_y = \frac{L - C_2}{2} = \frac{2 - 0{,}30}{2} = 0{,}85 \text{ m.} \quad y \qquad l_x = \frac{L - C_1}{2} = \frac{2 - 0{,}50}{2} = 0{,}75 \text{ m.}$$

Momentos actuantes en las dos direcciones.

$$M_{uy} = \frac{22.500 \times 1 \times 0{,}85^2}{2} = 8.128 \text{ Kg-m.} \Rightarrow As_y = 8{,}53 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

Usar Ø 1/2" c/12,5 cm. en la dirección Y.

$$M_{ux} = \frac{22.500 \times 1 \times 0{,}75^2}{2} = 6{,}328 \text{ Kg-m.} \Rightarrow As_x = 6{,}64 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

Usar Ø 1/2" c/15 cm. en la dirección X.

Determinación del acero mínimo por retracción y temperatura

$As_{mín} = 0{,}0018 \times 100 \times 35 = 6{,}3 \text{ cm}^2/\text{m.} < As_{cálculo}$ *OK*

DISEÑO POR PUNZONAMIENTO (Ver Fig. 7.31.b)

Por norma:

$$v_{cu} = 0{,}85\left(0{,}53 + \frac{1{,}06}{\beta c}\right)\sqrt{210} = 14{,}34 \text{ K/cm}^2 > 0{,}85 \times 1{,}06 \times \sqrt{210} = 13{,}07 \text{ K/cm}^2$$

$$\text{Donde, } \beta c = \frac{C2}{C1} = \frac{50}{30} = 1{,}67$$

El esfuerzo cortante máximo permitido en el concreto $v_{cu} = 13{,}07$ K/cm²

Determinación del esfuerzo cortante actuante

Perímetro crítico => $P_o = 2(C_1 + d) + 2(C_2 + d)$

Area crítica => $A_o = (2(C_1 + d) + 2(C_2 + d))d$

Chequeo del esfuerzo cortante actuante.

$$v_u = \frac{\sigma u \left(L^2 - (C_1 + d)(C_2 + d)\right)}{\left(2(C_1 + d) + 2(C_2 + d)\right)d} < v_{cu}$$

$$v_u = \frac{22.500\left(2^2 - (0{,}50 + 28)(0{,}30 + 0{,}28)\right)}{\left(2(50 + 28) + 2(30 + 28)\right)28} = 10{,}48 \text{ K/cm}^2 < 13{,}07 \text{ K/cm}^2 \text{ OK}$$

DISEÑO POR ADHERENCIA Y LONGITUD DE DESARROLLO (Ver Fig. 7.31.a)

$$Ld \geq 1{,}4\ \frac{0{,}06 A_s\, f_y}{\sqrt{f'_c}}$$

$$Ld = 1{,}4\ \frac{0{,}06 \times 1{,}27 \times 4.200}{\sqrt{210}} = 30{,}91 \text{ cm.} < \ldots$$

$$\ldots < 0{,}0084 Ø f_y = 0.008 \times 1{,}27 \times 4.200 = 44{,}8 \text{ cm.}$$

Se toma Ld = 44,8 cm.

Se tiene para desarrollar:

$$Ld_y = \frac{L - C_2}{2} - r \quad \Rightarrow \quad Ld_y = \frac{2 - 0{,}50}{2} - 0{,}07 = 0{,}68 \text{ m.} > 44{,}8 \text{ cm.} \qquad OK$$

$$Ld_x = \frac{L - C_1}{2} - r \quad \Rightarrow \quad Ld_x = \frac{2 - 0{,}30}{2} - 0{,}07 = 0{,}78 \text{ m.} > 44{,}8 \text{ cm.} \qquad OK$$

DISEÑO POR APLASTAMIENTO

$$F = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = \sqrt{\frac{200 \times 200}{30 \times 50}} = 5{,}16 > 2 \Rightarrow F = 2$$

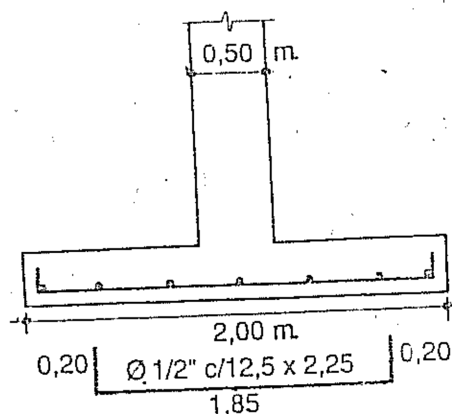
Carga máxima permitida sobre la zapata.

$$P_{máx} = F\, Ø\, (0{,}85 f'_c A_1) = 2 \times 0{,}75 \times 0{,}85 \times 210 \times 30 \times 40 = 374.850 \text{ Kg.}$$

$$P_{máx} = 374{,}85 \text{ T.} > P_u = 90 \text{ T.} \qquad OK$$

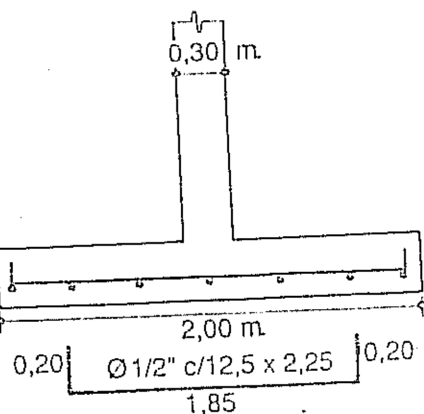
Ver diseño definitivo enla Fig. 7.32.

CORTE EN X – X



(a)

CORTE EN Y – Y



(b)

Figura 7.32

7.13.1.4 EJERCICIO Nº 4

FUNDACION CUADRADA CON COLUMNA METALICA APOYADA EN PLANCHA METALICA

Diseñar la fundación para las cargas y materiales indicados, si tiene una columna metálica IPN 20.

Medidas exteriores perfil IPN 20 Ancho $b_p = 9$ cm. y alto $h_p = 20$ cm.
$P_D = 21$ T. $P_L = 10$ T. $R_{Sadm} = 1{,}50$ K/cm²
Concreto $f'_c = 210$ K/cm² Acero $f_y = 4.200$ K/cm²

DIMENSIONAMIENTO (Ver Fig. 7.33.a)

$P_u = 1{,}4\ P_D + 1{,}7\ P_L = 1{,}4 \times 21 + 1{,}7 \times 10 = 46{,}4$ T.

$P_s = P_D + P_L = 21 + 10 = 31$ T.

$$A_z = \frac{P_s}{R_{Sadm}} = \frac{31.000\ Kg}{15.000\ cm^2} = 2{,}07\ m^2 \Rightarrow \text{Se toma zapata } 1{,}50 \times 1{,}50 \text{ mts.}$$

$$\sigma_u = \frac{46.400\ Kg}{150 \times 150\ K/cm^2} = 2{,}06\ K/cm^2 \Rightarrow \text{Esfuerzo último de diseño}$$

DISEÑO POR APLASTAMIENTO (Ver Fig. 7.33.a)
Area de la plancha metálica => $A_p = P_u/f_c$

Donde f_c = Esfuerzo máximo permitido $\leq 2\ \emptyset\ 0{,}85\ f'_c$

En este caso se asume que el factor F = 2

$$f_c = 2 \times 0{,}70 \times 0{,}85 \times 210 = 249{,}9\ K/cm^2 \Rightarrow A_p = \frac{46.400\ Kg.}{249{,}9\ K/cm^2} = 185{,}6\ cm^2$$

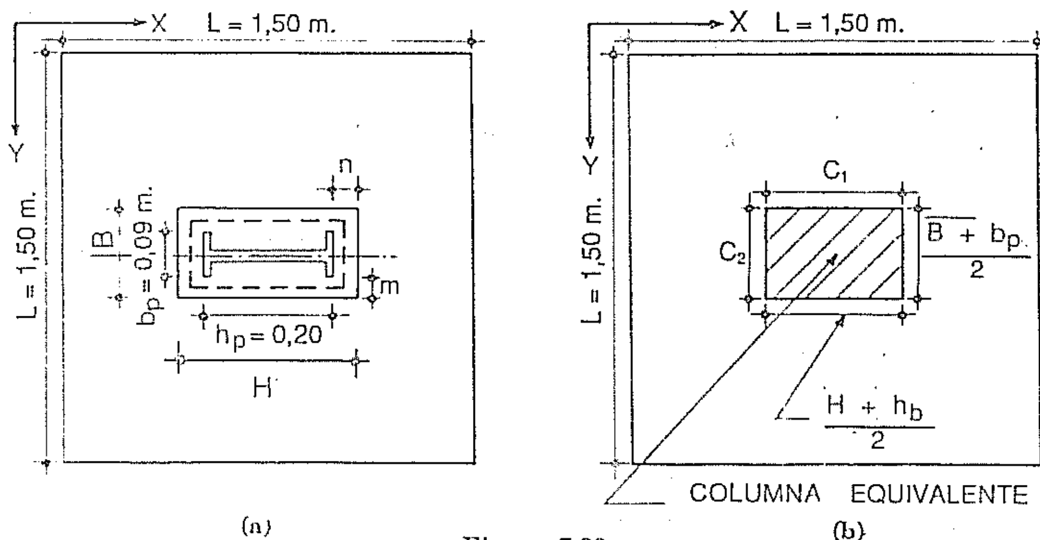


Figura 7.33

Sean H y B las dimensiones de la plancha metálica base se debe cumplir

$H \times B \geq 185{,}6\ cm^2$ => Para obtener estas medidas basta agregar 2,5 cm. a las medidas totales del perfil

perfil

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} H = h_p + 2{,}5 = 9 + 2{,}5 = 11{,}5 \text{ cm.} \\ B = b_p + 2{,}5 = 20 + 2{,}5 = 22{,}5 \text{ cm.} \end{array}\right\} H \times B = 11{,}5 \times 22{,}5 = 258{,}75 > 185{,}6 \text{ cm}^2 \ OK$$

El verdadero valor de $F = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = \sqrt{\frac{150 \times 150}{22{,}5 \times 11{,}5}} = 9{,}32 > 2 \Rightarrow F. = 2$

Luego, el verdadero esfuerzo de aplastamiento

$$fc = \frac{46.400 \text{ Kg.}}{22{,}5 \times 11{,}5 \text{ cm}^2} = 179{,}3 \text{ K/cm}^2 < 249{,}9 \text{ K/cm}^2 \qquad OK$$

Se aceptan las dimensiones asumidas de la plancha metálica

El espesor necesario para la plancha será "t"

$$\left.\begin{array}{l} n = \dfrac{B - 0{,}80b_p}{2} = \dfrac{11{,}5 - 0{,}80 \times 9}{2} = 2{,}15 \text{ cm.} \\ m = \dfrac{H - 0{,}95h_p}{2} = \dfrac{22{,}5 - 0{,}95 \times 20}{2} = 22{,}5 \text{ cm.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Para óptimo diseño se debe cumplir que $m = n$
Luego, $m = n = 2{,}5$ cm.

El espesor "t" necesario para la plancha.

Determinación del espesor de la plancha, $t = \sqrt{\frac{3\, fc\, m^2}{0{,}7 f_y}}$

Donde, $f_y = 2.800$ K/cm² => Esfuerzo del acero de la plancha.
$fc = 179{,}3$ K/cm² ≈ 180 K/cm² => Esfuerzo de aplastamiento.
$m = 2{,}5$ cm.

$$t = \sqrt{\frac{3 \times 180 \times 2{,}5^2}{0{,}7 \times 2.800}} = 1{,}31 \text{ cm.} \Rightarrow e = 5/8'' \text{ espesor de la plancha base}$$

Determinación de las dimensiones de la columna equivalente.

$$C_1 = \frac{H + h_p}{2} = \frac{22{,}5 + 20}{2} = 21{,}25 \text{ cm.} \Rightarrow C_1 = 21 \text{ cm.}$$

$$C_2 = \frac{B^2 + b_p}{2} = \frac{11{,}5 + 9}{2} = 10{,}25 \text{ cm.} \Rightarrow C_2 = 10 \text{ cm.}$$

DISEÑO POR CORTE (Ver Fig. 7.33.b)
Se calcula como columna rectangular equivalente con dimensiones C_1 y C_2

$v_{cu} = 0{,}85 \times 0{,}53\sqrt{210} = 6{,}53$ K/cm²

$l' = \dfrac{1{,}5 - 0{,}1}{2} = 0{,}23 = 0{,}47$ => Longitud mas desfavorable.

Chequeo del esfuerzo cortante actuante.

$v_{u_y} = \dfrac{20.600 \times 1 \times 0{,}47}{100 \times 23} = 4{,}20$ K/cm² $<$ 6,52 K/cm² *OK*

DISEÑO POR FLEXION (Ver Fig. 7.33.b)

$l_x = \dfrac{1{,}5 - 0{,}21}{2} = 0{,}645$ m. y $l_y = \dfrac{1{,}5 - 0{,}10}{2} = 0{,}70$ m.

Momentos flectores actuantes.

$M_{ux} = \dfrac{20.600 \times 1 \times 0{,}645}{2} = 4.285$ Kg–m=> $A_{sx} = 5{,}47$ cm²/m.=> Ø1/2"c/20 cm.

$M_{uy} = \dfrac{20.600 \times 1 \times 0{,}70^2}{2} = 5{,}047$ Kg–m=> $A_{sy} = 6.45$ cm²/m.=> Ø 1/2"c/15 cm.

Chequeo del área de acero mínima
$A_{smín} = 0{,}0018 \times 100 \times 30 = 5{,}4$ cm² $< A_{s\,cálculo}$ *OK*

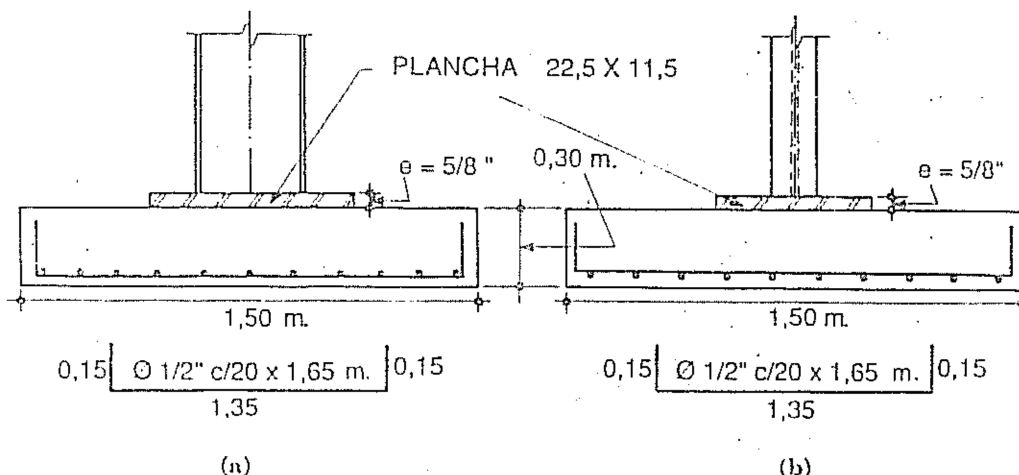


Figura 7.34

DISEÑO POR PUNZONAMIENTO (Ver Fig. 7.34.a)

$$v_{cu} = 0,85\left(0,53 + \frac{1,06}{\frac{21}{10}}\right)\sqrt{210} = 14,99 > 0,85 \times 1,06 \times \sqrt{210} = 13,05 \ K/cm^2$$

Se toma $v_{cu} = 13,05$ K/cm²

Chequeo del esfuerzo cortante actuante

$$v_u = \frac{20.600\left(1,5^2 - (0,10 + 0,23)(0,21 + 0,23)\right)}{\left(2(21 + 23) + 2(10 + 23)\right)23} = 12,24 \ K/cm^2 < v_{cu} = 13,05 \ K/cm^2$$

OK

DISEÑO POR ADHERENCIA Y LONGITUD DE DESARROLLO (Ver Fig. 7.33.b)

$$L_d = 1,4\ \frac{0,06 \times 1,27 \times 4.200}{\sqrt{210}} = 30,91 < 0,0084 \times 1,27 \times 4.200 = 44,8 \text{ cm}$$

Se tiene para desarrollar

$$\left.\begin{aligned} L_{dy} &= \frac{1,5 - 0,21}{2} - 0,07 = 0,575 \text{ m.} \\ L_{dx} &= \frac{1,5 - 0,11}{2} - 0,07 = 0,625 \text{ m.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{En ambos casos mayores que } 44,8 \text{ cm.}$$

Ver diseño definitivo en la Fig. 7.34.

7.13.2 EJERCICIO Nº 5
FUNDACION RECTANGULAR

Diseñar la fundación rectangular para las siguientes cargas y materiales, si se tiene una columna o pedestal de 45 x 60 cms. y una dimensión fija de la zapata de 1,75 m.

$P_D = 85$ T. $P_L = 22$ T. $R_{Sadm} = 2,50$ K/cm²

Concreto $f'c = 210$ K/cm² Acero $f_y = 4200$ K/cm²

DIMENSIONAMIENTO (Ver Fig. 7.35.a)

Se asume altura de zapata h = 45 cm.

$P_u = 1,4\ P_D + 1,7\ P_L = 1,4 \times 85 + 1,7 \times 22 = 156,4$ T.

$P_S = P_D + P_L = 85 + 22 = 107$ T.

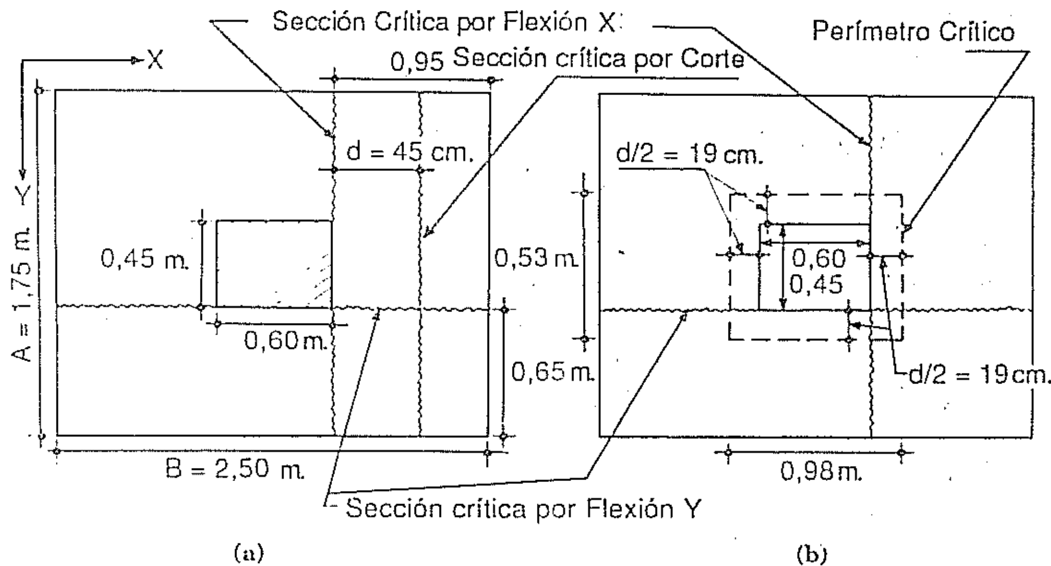


Figura 7.35

$$A_z = \frac{P_s}{R_{sadm}} = \frac{10.700 \text{ Kg}}{25.000 \text{ K/cm}^2} = 4,28 \text{ m}^2$$

$$A_z = A \times B = 4,28 \text{ m}^2 \Rightarrow B = \frac{4,28}{1,75} = 2,44 \text{ m.} \Rightarrow \text{Se toma } B = 2,50 \text{ m.}$$

$$\sigma_u = \frac{156.400 \text{ Kg}}{175 \times 250 \text{ cm}^2} = 3,75 \text{ K/cm}^2$$

DISEÑO POR PUNZONAMIENTO (Ver Fig. 7.35.b)

$$v_{cu} = 0,85 \left(0,53 + \frac{1,06}{\frac{60}{45}}\right)\sqrt{210} = 16,26 \text{ K/cm}^2 > 0,85 \times 1,06\sqrt{210} = 13,05 \text{ K/cm}^2$$

Se toma $v_{cu} = 13,05$ K/cm²

Chequeo del esfuerzo cortante actuante.

$$v_{cu} = \frac{35.700\left(1,75 \times 2,50 - (0,45 + 0,38)(0,60 + 0,38)\right)}{\left(2(45 + 38) + 2(60 + 38)\right)38} = 9,24 \text{ K/cm}^2$$

$v_u = 9,24$ K/cm² $< 13,05$ K/cm² *OK*

DISEÑO POR CORTE (Ver Fig.7.35.b)

$$v_{cu} = 0,85 \times 0,53\sqrt{210} = 6,52 \text{ K/cm}^2$$

Chequeo del esfuerzo cortante actuante.

$$l' = \frac{2{,}50 - 0{,}60}{2} - 0{,}37 = 0{,}58 \text{ m.}$$ => Longitud mas desfavorable.

$$V_{ux} = \frac{37.500 \times 1 \times 0{,}95^2}{2} = 5{,}72 \text{ K/cm}^2 < 6{,}52 \text{ K/cm}^2$$ OK

DISEÑO POR FLEXION (Ver Fig. 7.35.b)
Momentos flectores actuantes.
Dirección larga X

$$M_{ux} = \frac{37.5000 \times 1 \times 0{,}95^2}{2} = 16.921 \text{ Kg–m} \Rightarrow A_{sx} = 13{,}08 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

Usar Ø 5/8" c/15 cm.

Dirección corta Y

$$M_{uy} = \frac{37.500 \times 1 \times 0{,}65^2}{2} = 7922 \text{ Kg–m} \Rightarrow A_{sy} = 6{,}13 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

Area de acero mínima, $A_{smín} = 0{,}0018 \times 100 \times 45 = 8{,}10 \text{ cm}^2/\text{m.}$

Distribución de acero en la dirección corta.

$$A_{sy/A} = A_{s_x} B \left(\frac{2}{\frac{B}{A} + 1} \right) = 6{,}13 \times 2{,}50 \left(\frac{2}{\frac{2{,}50}{1{,}75} + 1} \right) = 12{,}62 \text{ cm}^2/1{,}75 \text{ m.}$$

Separación $S = \frac{175}{12{,}62} \times 1{,}27 = 17{,}61 \text{ cm.}$

Usar Ø 1/2" c/15 cm. en un ancho central igual a 1,75 m.

Para el resto de la zapata en la dirección corta (los 0,75 m. restantes).

$$A_{sy/0,75} = A_{(s,t)y} - A_{sy/1,75} = 6{,}13 \times 2{,}50 - 12{,}62 = 2{,}70 \text{ cm}^2/0{,}75 \text{ m.}$$

Pero $2{,}70 \text{ cm}^2/0{,}75 \text{ m.} < A_{smín} = 0{,}0018 \times 100 \times 45 = 8{,}1 \text{ cm}^2/\text{m.}$

Por lo tanto se usará $A_{smín}$ => Ø 1/2" c/15 cm.
Ver diseño definitivo en la Fig. 7.36.

DISEÑO POR ADHERENCIA Y LONGITUD DE DESARROLLO (Ver Fig.7.35.a)

$$L_{dx} \geq \frac{0{,}06 \times 1{,}98 \times 4200}{\sqrt{210}} = 46{,}25 \text{ cm.} < 0{,}0084 \times 1{,}58 \times 4.200 = 55{,}74 \text{ cm.}$$

$$L_{dx} = 44{,}8 \text{ cm.} < \frac{2{,}50 - 0{,}60}{2} - 0{,}07 = 0{,}88 \text{ cm .}$$ OK

$$L_{dy} = 1{,}4\ \frac{0{,}06 \times 1{,}27 \times 4.200}{\sqrt{210}} = 30{,}91\ \text{cm.} < 0{,}0084 \times 1{,}27 \times 4.200 = 44{,}80\ \text{cm.}$$

$$L_{dy} = 44{,}80\ \text{cm.} < \frac{1{,}75 - 0{,}45}{2} - 0{,}07 = 0{,}58\ \text{cm.} \qquad OK$$

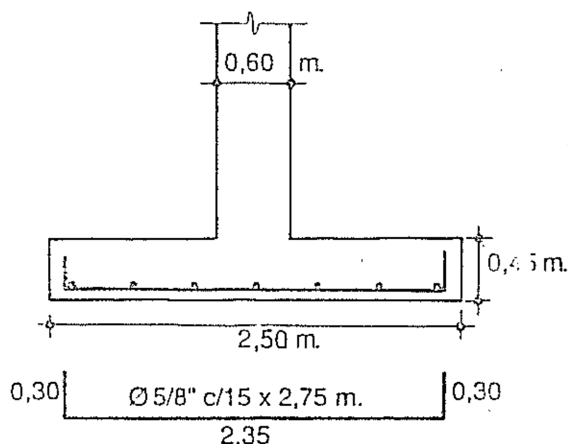
DISEÑO POR APLASTAMIENTO

$$F = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = \sqrt{\frac{175 \times 250}{45 \times 60}} = 3{,}98 > 2 \Rightarrow F = 2$$

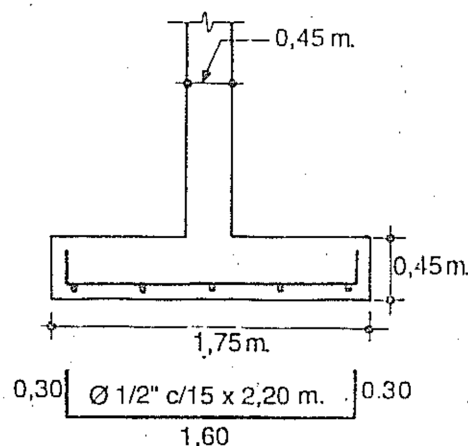
Carga máxima permitida sobre la zapata

$P_{máx} = F\ Ø\ (0{,}85\ f'c\ A_1) = 2 \times 0{,}7 \times 0{,}85 \times 210 \times 45 \times 60 = 674.730$ Kg

$P_{máx} = 674{,}73$ T. $> P_u = 46{,}4$ T.



(a)



(b)

Figura 7.36

7.13.3 EJERCICIO Nº 6
FUNDACION CON CARGA EXCENTRICA EN UNA DIRECCION

Diseñar la fundación excéntrica para las cargas y materiales dados, cuando se tiene una columna o pedestal de concreto de 40 x 40 cms.

DATOS

$P_D = 52$ T. — $M_D = 10$ T–m

$P_L = 15$ T. — $M_L = 5$ T–m

$P_E = 20$ T. — $M_E = 6$ T–m

$R_{Sadm} = 2{,}00$ K/cm — $f'c = 210$ K/cm² — $fy = 4200$ K/cm²

Determinación de las cargas máximas de trabajo

$P_u = 0{,}75(1{,}4\ P_D + 1{,}7P_L + 1{,}9P_E) = 0{,}75\ (1{,}4 \times 52 + 1{,}7 \times 15 + 1{,}9 \times 20) = 101{,}3$ T.

$M_u = 0{,}75(1{,}4\ P_D + 1{,}7P_L + 1{,}9\ P_E) = 0{,}75\ (1{,}4 \times 10 + 1{,}7 \times 5 + 1{,}9 \times 6) = 25{,}3$ T–m

$P_s = P_d + P_L + P_E = 52 + 15 + 20 = 87$ T.

$M_s = M_o + M_L + M_E = 10 + 5 + 6 = 21$ T– m

DIMENSIONAMIENTO (Ver Fig. 7.37.a)

$$A_z = \frac{P_s}{R_{Sadm}} = \frac{87.000\ \text{Kg}}{20.000\ \text{K/cm}^2} = 4{,}35\ \text{m}^2 \Rightarrow A_z = A \times B = 4{,}35\ \text{m}^2$$

Fijando una dimensión de la zapata, en este caso A = 2,00 m.
Conociendo el tamaño mínimo de $B \geq 6e$

$$\text{Donde } e = \frac{M_u}{P_u} = \frac{21\ \text{T–m}}{87\ \text{T.}} = 0{,}241\ \text{m.} \Rightarrow B \geq 6e = 6 \times 0{,}241\text{m} = 1{,}45\ \text{m.}$$

Determinación de los esfuerzos sobre la base de la zapata.
Se prueba con varios valores de longitud $B \geq 1{,}45$ m.
Para B = 1,50 m.

$$\sigma_{máx} = \frac{87.000}{200 \times 150}\left(1 + \frac{6 \times 24{,}1}{150}\right) = 5{,}69\ \ \text{K/cm}^2 > R_{Sadm} \qquad \textit{NO SIRVE}$$

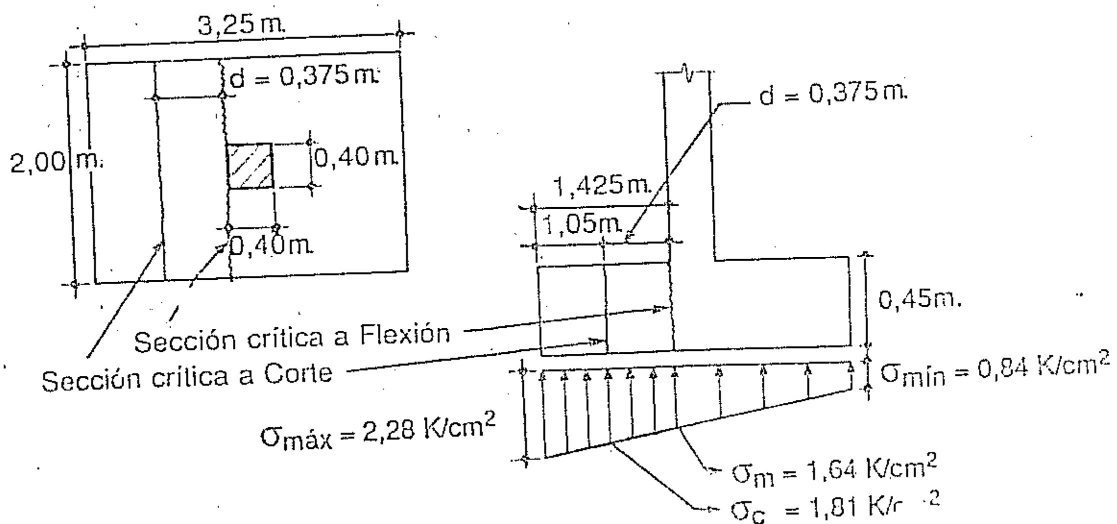


Figura 7.37

Para B = 3,00 m.

$$v_{máx} = \frac{87.000}{200 \times 300}\left(1 + \frac{6 \times 24{,}1}{300}\right) = 2{,}15 \text{ K/cm}^2 > R_{sadm} \qquad \textit{NO SIRVE}$$

Para B = 3,25 m.

$$v_{máx} = \frac{87.000}{200 \times 300}\left(1 + \frac{6 \times 24{,}1}{300}\right) = 1{,}93 \text{ K/cm}^2 > R_{sadm} \qquad \textit{OK}$$

Las dimensiones definitivas de la zapata son: A = 2,00 m. y B = 3,25 m.
Se asume altura de zapata h = 45 cm.

Determinación de los esfuerzos últimos para el diseño.

$$\sigma_{máx} = \frac{101.8000}{200 \times 325}\left(1 + \frac{6\,\frac{25{,}3}{101{,}8}}{3{,}25}\right) = 2{,}28 \text{ K/cm}^2$$

$$\sigma_{mín} = \frac{101.800}{200 \times 325}\left(1 - \frac{6\,\frac{25{,}3}{101{,}8}}{3{,}25}\right) = 0{,}84 \text{ K/cm}^2$$

DISEÑO POR CORTE

Por norma, $v_{cu} = 0{,}85 \times 0{,}53\sqrt{210} = 6{,}52$ K/cm²

Para la determinación del esfuerzo cortante actuante, se toma la cuña trapezoidal que está debajo de la sección crítica a corte, entre $\sigma_{máx}$ y σ_c.

En este caso $\sigma_{máx} = 2{,}28$ K/cm² y $\sigma_c = 1{,}81$ K/cm²

$$v_u = \frac{\frac{(\sigma_{máx} + \sigma_c)}{2} \times 1 \times l'}{100\,d} = \frac{\left(\frac{22.800 + 18.100}{2}\right) 1 \times 1{,}05}{100 \times 38} = 5{,}6 \text{ K/cm}^2 < \ldots$$

$$\ldots < v_{cu} = 6{,}52 \text{ K/cm}^2 \quad \textit{OK}$$

DISEÑO POR FLEXION (Ver Fig. 7.37 a)

Determinación de los momentos flectores actuantes.

Para el momento en la dirección larga, se toma la cuña trapezoidal debajo de la sección crítica con los esfuerzos comprendidos entre $\sigma_{máx}$ y σ_m.

En este caso $\sigma_{máx} = 2{,}28$ K/cm² y $\sigma_m = 1{,}64$ K/cm²

Donde,

$$M_{ux} = \frac{16.400 \times 1 \times 1{,}425^2}{2} + \frac{(22.800 + 16.400) \times 1 \times 1{,}425^2}{2 \times 3} = 18.817 \text{ Kg–m}$$

Area de acero dirección larga A_{sx} = 14,55 cm^2/m. => Ø 5/8" c/12,5 cm.

Para el momento en la dirección corta, se diseña con esfuerzo uniforme promedio entre el $\sigma_{máx}$ y el existente en la dirección crítica σ_m.

En este caso, $\sigma_{prom} = \dfrac{22.800 + 16.400}{2} = 19.600$ K/ m²

Donde, $M_{uy} = \dfrac{19.600 \times 1 \times 0{,}80^2}{2} = 6.272$ Kg–m.

Area de acero dirección corta A_{sy} = 4,85 cm^2/m. => Ø 1/2" c/20 cm.

Area de acero mínima = 0,0018 x 100 x 45 = 8,10 cm^2 /m.=> Ø 1/2" c/15 cm.

DISEÑO POR LONGITUD DE DESARROLLO Y ADHERENCIA (Ver Fig. 7.38.a)

$$L_{dy} = 1{,}4 \frac{0{,}06 \; A_s f_y}{\sqrt{f'_c}}$$

$$L_d = 1{,}4 \frac{0{,}06 \times 1{,}98 \times 4.200}{210} = 48{,}20 \text{ cm.} < 0{,}0084 \times 1{,}58 \times 4.200 = 55{,}7 \text{ cm.}$$

$$L_{dx} = 1{,}4 \frac{0{;}06 \times A_s f_y}{\sqrt{f'_c}}$$

$$L_{dx} = 1{,}4 \frac{0{,}06 \times 1{,}27 \times 4.200}{210} = 30{,}91 \text{ cm.} < 0{,}0084 \times 1{,}58 \times 4.200 = 44{,}8 \text{ cm.}$$

Donde, L_{dx} = 55,7 cm. < 1,355 cm. y L_{dy} = 44,8 cm. < 0,73 cm. *OK*

DISEÑO POR APLASTAMIENTO

$$F = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = \sqrt{\frac{200 \times 325}{40 \times 40}} = 6{,}37 > 2 \Rightarrow F = 2$$

Máxima carga permitida en la zapata.

$P_{máx} = F \; Ø \; (0{,}85 \; f'_c \; A_1) = 2 \times 0{,}7 \times 0{,}85 \times 210 \times 40 \times 40 = 199.920$ Kg.

$P_{máx}$ = 199,92 T. > P_u = 101,8 T. *OK*

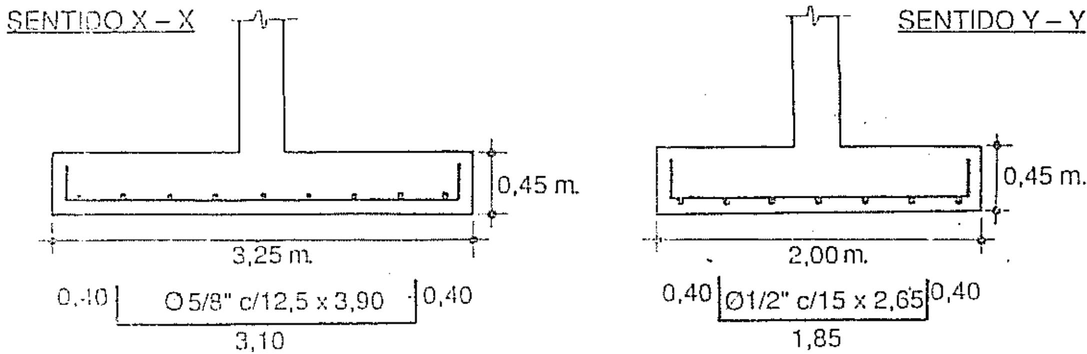


Figura 7.38

7 . 13 . 4 . EJERCICIO Nº 7
FUNDACION COMBINADA CON DOS COLUMNAS

Diseñar la fundación combinada para las cargas y materiales dados, Ver Fig. 7.39.

Columna Nº 1
P_{D1} = 38 T.
P_{L1} = 4 T.
Dimensiones 40 x 40 cms.
Concreto f'c = 210 K/cm²

Columna Nº 2
P_{D2} = 55 T.
P_{L2} = 6 T.
Dimensiones 30 x 30 cms.
Acero fy = 4.200 K/cm.

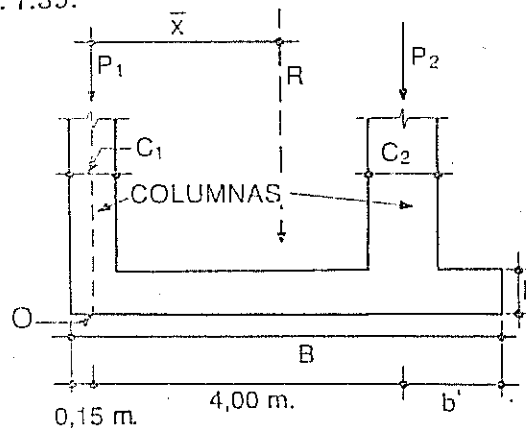


Figura 7.39

Se debe asegurar una resultante de fuerzas en equilibrio lo cual debería producir una distribución de esfuerzos constantes en la base de la zapata. Haciendo sumatoria de momentos estáticos, $\sum S_o = 0$

$$\sum S_o = \Rightarrow P_1 \times 0 + P_2 \times 5 = (P_1 + P_2)\ \overline{X} \Rightarrow \overline{X} = \frac{P_1 \times 0 + P_2 \times 5}{P_1 + P_2}$$

$$P_1 = P_{D1} + P_{L1} = 38 + 4 = 42 \text{ T.}$$

$$P_2 = P_{D2} + P_{L2} = 55 + 6 = 61 \text{ T.}$$

$$\overline{X} = \frac{42 \times 0 + 61 \times 4}{42 + 61} = 2{,}37 \text{ m}$$ (Ubicación de la resultante respecto a P_a)

El largo total B de la zapata será, $B = 2(\overline{X} + 0{,}15) = 2(2{,}37 + 0{,}15) = 5{,}04$ m.

Determinación del ancho A de la zapata.

$$A_z = \frac{P_s}{R_{Sadm}} = \frac{42.000 + 61.000}{20.000} = 5{,}15 \text{ m}^2 \Rightarrow A = \frac{5{,}15}{5{,}04} = 1{,}02 \text{ m.} \Rightarrow 1{,}50 \text{ m.}$$

Dimensiones de la zapata 1,50 x 5,00 (Se desprecia la pequeña variación de los esfuerzos cuando se redondea de 5,04 m. a 5,00 m.)

El cálculo de la fundación se realiza como una viga de ancho A con carga invertida uniformemente distribuida hacia arriba, ver la Fig. 7.40.

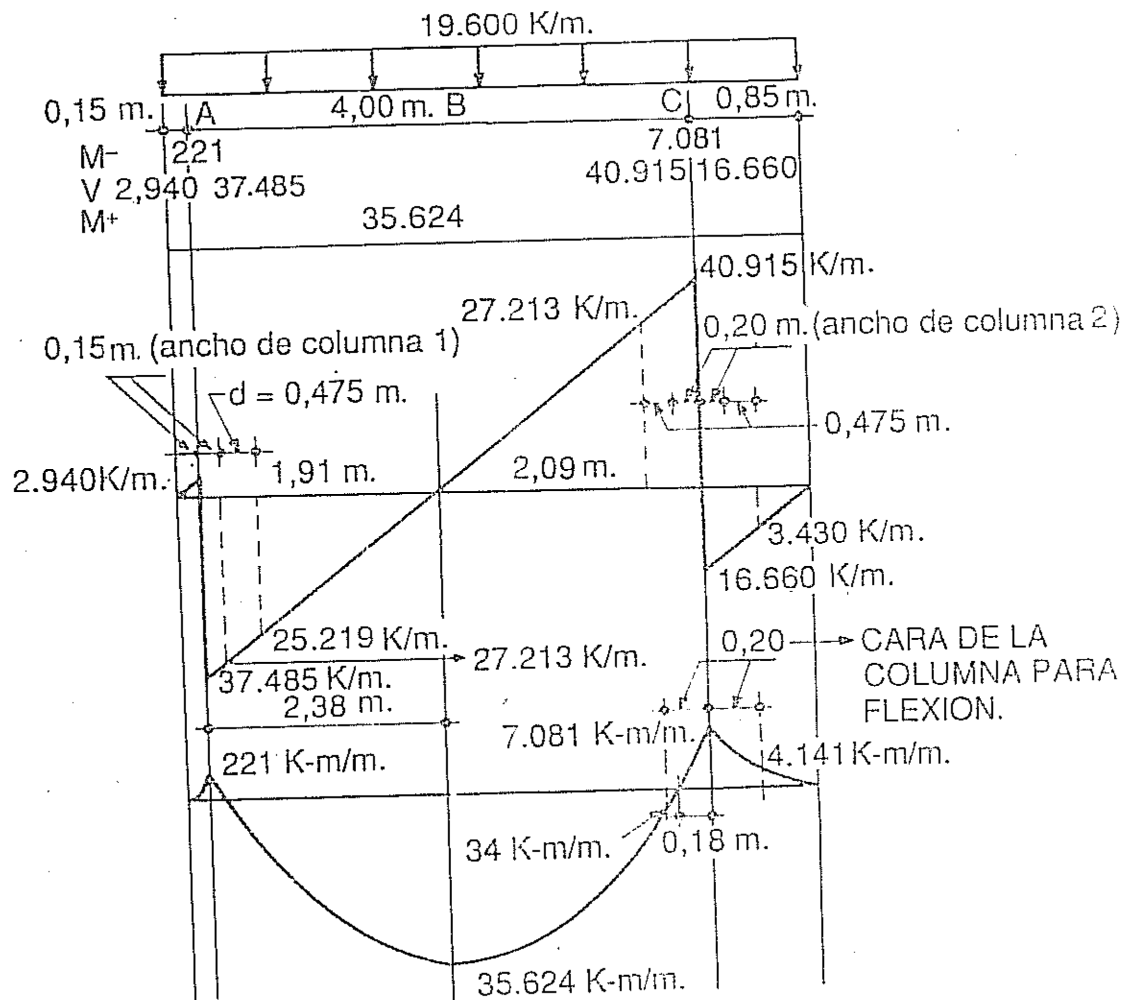


Figura 7.40

Determinación de los esfuerzos debajo de las columnas, ver Fig.7.41.

$$\sigma u_1 = \frac{Pu_1}{A(C_1 + d/2)} = \frac{1{,}4 \times 38.000 + 1{,}7 \times 4.000}{150(30 + 48/2)} = 7{,}41 \ \text{K/cm}^2$$

$$\sigma u_2 = \frac{Pu_2}{A(C_2 + d)} = \frac{1{,}4 \times 55.000 + 1{,}7 \times 6.000}{150(40 + 48)} = 6{,}61 \ \text{K/cm}^2$$

Determinación de momentos en la dirección corta .

$$Mu_1 = \frac{74.100 \times 1 \times 0{,}60^2}{2} = 13.338 \text{ Kg-m.} \Rightarrow As_1 = 8{,}17\text{cm}^2/\text{m} \Rightarrow \text{Ø}1/2\text{"c/15 cm.}$$

$$Mu_2 = \frac{66.100 \times 1 \times 0{,}60^2}{2} = 11.898 \text{ Kg-m.} \Rightarrow As_2 < As_{mín} \Rightarrow \text{Ø}1/2\text{" c/15 cm.}$$

DISEÑO POR CORTE (Ver Fig. 7.41)

Por norma $v_{cu} = 0{,}85 \times 0{,}53\sqrt{210} = 6{,}52 \ \text{K/cm}^2$

Corte en dirección larga

$$vu_{máx} = \frac{27.213 \text{ Kg}}{100 \times 48 \text{ cm}^2} = 5{,}72 \ \text{K/cm}^2 < 6{,}52 \ \text{K/cm}^2 \qquad OK$$

Corte en dirección corta

$$vu_1 = \frac{\sigma u_1 (0{,}60 - d)}{100 d} = \frac{74.100 \times 1 \times 1(0{,}60 - 0{,}48)}{100 \times 48} = 1{,}85 \ \text{K/cm}^2 \qquad OK$$

$$vu_2 = \frac{\sigma u_2 (0{,}60 - d)}{100 d} = \frac{66.100 \times 1 \times (0{,}60 - 0{,}48)}{100 \times 48} = 1{,}65 \ \text{K/cm}^2 \qquad OK$$

DISEÑO POR PUNZONAMIENTO
(Ver Fig. 7.42)

$$v_{cu} = 0{,}85\left(0{,}53 + \frac{1{,}06}{\beta c}\right)\sqrt{f'c} > \ldots$$

$$\ldots > 0{,}85 \times 1{,}06\sqrt{f'c} = 13{,}07 \ \text{K/cm}^2$$

Para la columna N° 1

$\beta c_2 = 1 \Rightarrow V_{cu_2} = 19{,}58 \ \text{K/cm}^2 > \ldots$

$\ldots > 13{,}07 \ \text{K/cm}^2 \Rightarrow v_{cu} = 13{,}07 \ \text{K/cm}^2$

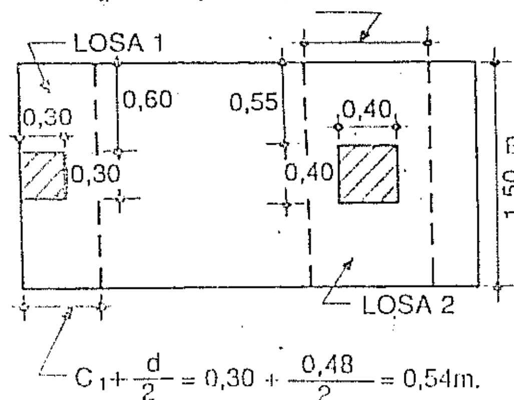


Figura 7.41

$$\nu u_1 = \frac{60.000 - 19.600 \times 0{,}54 \times 0{,}78}{(2 \times 54 + .78)\ 48} = 5{,}79 \ \text{K/cm}^2 < 13{,}07 \ \text{K/cm}^2 \qquad OK$$

Para la columna Nº 2

$\beta_{c_2} = 1 \Rightarrow \nu cu_2 = 19{,}58 \ \text{K/cm}^2 > 13{,}07 \ \text{K/cm}^2 \Rightarrow \nu cu = 13{,}07 \ \text{K/cm}^2$

$$\nu u_2 = \frac{87.200 - 19.600 \times 0{,}88 \times 0{,}88}{4\ (88)\ 48} = 4{,}26 \ \text{K/cm}^2 < 13{,}07 \ \text{K/cm}^2 \qquad OK$$

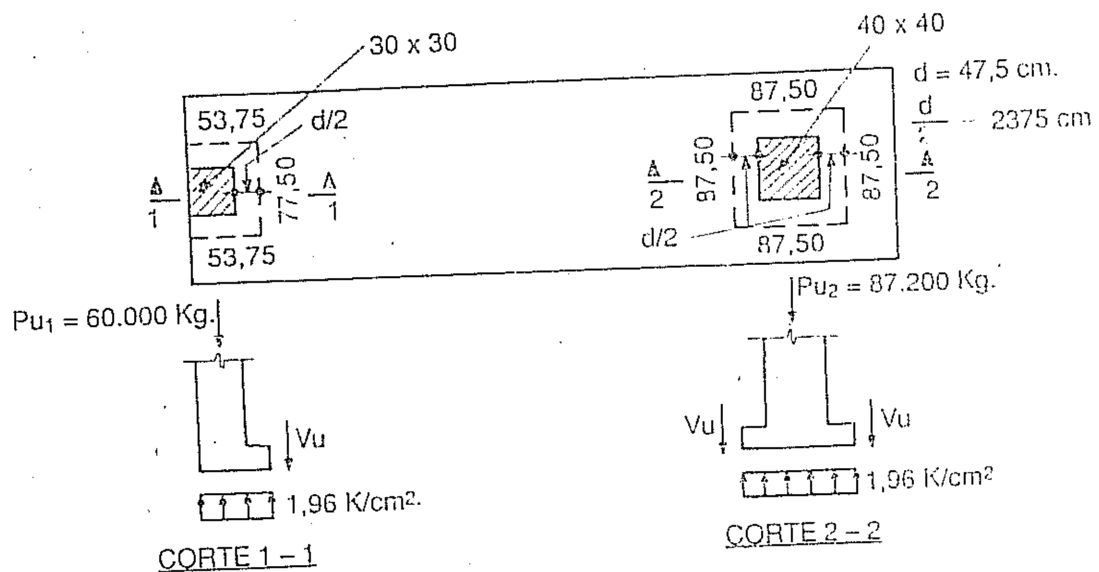


Figura 7.42

DISEÑO POR LONGITUD DE DESARROLLO Y ADHERENCIA

Lado largo (sólo para la armadura de Ø 1/2").

$$Ld \geq 1{,}4 \frac{0{,}06 \times 1{,}27 \times 4.200}{\sqrt{210}} = 22{,}08 \text{ cm.} < 0{,}006 \times 1{,}27 \times 4.200 = 32{,}0 \text{ cm.}$$

$Ld = 0{,}32$ m. $< 0{,}85 - 0{,}07$ m. $= 0{,}78$ m. *OK*

Lado corto

$$Ld \geq \frac{0{,}06 \times 1{,}27 \times 4.200}{\sqrt{210}} = 22{,}08 \text{ cm.} < 0{,}006 \times 1{,}27 \times 4.200 = 32{,}0 \text{ cm.}$$

$Ld = 0{,}32$ m $< 0{,}60 - 0{,}07$ m. $= 0{,}53$ m. *OK*

Ver diseño definitivo en la Fig. 7.43.

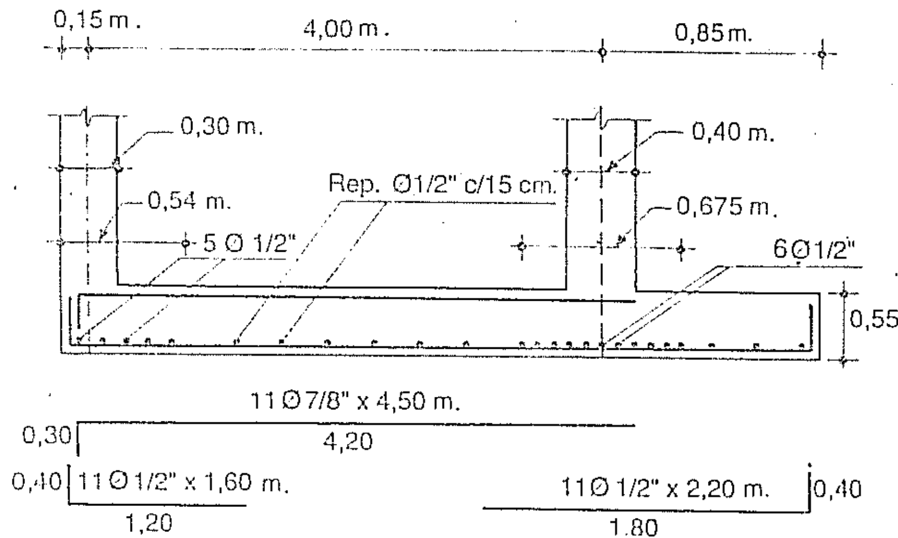


Figura 7.43

7.13.5 EJERCICIO Nº 8
FUNDACION DE TIRA

Diseñar la fundación de tira para las cargas y materiales dados, ver la Fig. 7.44.

DATOS

COLUMNA Nº 1

$P_{D1} = 41$ T.

$P_{L1} = 7$ T.

Dimensiones 40 x 40

Concreto f'c = 210 K/cm2

COLUMNA Nº 2

$P_{D2} = 75$ T.

$P_{L2} = 10$ T.

Dimensiones 40 x 40

Acero fy = 4.200 K/cm²

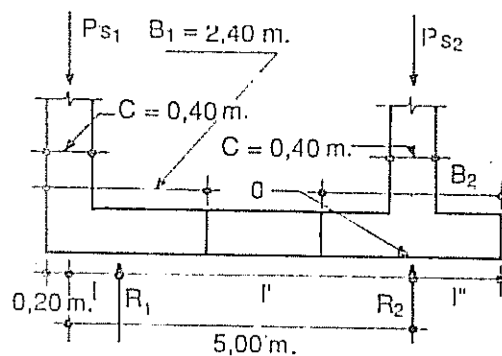


Figura 7.44

Se debe asegurar una resultante de fuerzas en equilibrio lo cual deberá producir una distribución de esfuerzos constante en la base de la zapata.

$P_{s1} = P_{D1} + P_{L1} = 41 + 7 = 48T.$

$P_{s2} = P_{D2} + P_{L2} = 75 + 10 = 85T.$

$P_{u1} = 1,4\ P_{D1} + 1,7P_{L1} = 1,4 \times 41 + 1,7 \times 7 = 69.3T.$

$P_{u2} = 1,4P_{D2} + 1,7P_{L2} = 1,4 \times 75 + 1,7 \times 10 = 122T.$

$\sum S_o = O \Rightarrow R_1 \times l' - P_{s1} \times 5 = O \Rightarrow R_1 = \dfrac{5P_{s1}}{l'}$

Tomando l = 1,00 mt. (Esto es arbitrario) => l' = 5 – 1 = 4 m.

$$R_1 = \frac{5(41+7)}{4} = 60 \text{ T.}$$

Tomando sumatoria de fuerzas verticales, $\sum Fv = 0$

$\sum Fv = 0 = P_{s1} + P_{s2} - R_1 - R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = P_{s1} + P_{s2} - R_1$

$R_2 = 48 + 85 - 60 = 73\text{T}.$

Determinación del área de la fundación A_{F1}

$$A_{F1} = B_1 \times A_1 = \frac{R_1}{R_{Sadm}} \Rightarrow A_1 = \frac{R_1}{B_1 \times R_{Sadm}}$$

Donde $B_1 = 2(0,20 + l) = 2(0,20 + 1,00) = 2,40$ m. Nótese que es multiplicado por 2, porque la resultante R_1 debe estar centrada.

$$\text{Luego, } A_1 \geq \frac{60.000}{2,40 \times 20.000} = 1,25 \text{ m}$$

En este caso se obligará a que $A_1 = A_2$, las zapatas de fundaciones deben ser centradas y recomendable de igual ancho, razón por la que se iguala el ancho de la zapata Nº 2 con la Nº 1.

Determinación de la dimensión B_2 de la zapata Nº 2.

Se considera la zapata de la fundación Nº2 como cuadrada, entonces:

$$A_{F2} = B_2 \times A_2 = \frac{R_2}{R_{Sadm}} \Rightarrow \text{Tomando } B_2 = A_2$$

$$B_2 = \sqrt{\frac{R_2}{R_{Sadm}}} = \sqrt{\frac{73.000}{20.000}} = 1,91 \text{ m.} \Rightarrow B_2 = A_2 = A_1 = 2,00 \text{ m}$$

Dimensiones definitivas de las zapatas

Fundación Nº1 => $B_1 = 2,40$ m. y $A_1 = 2,00$ m.

Fundación Nº2 => $B_2 = 2,00$ m. y $A_2 = 2,00$ m.

Determinación de esfuerzos en la base de la zapata.

$R_{u_1} = 5\frac{P_{u_1}}{4}$ y $R_{u_2} = P_{u_1} + P_{u_2} - R_{u_1}$ (Se mantienen las relaciones de servicio)

$$\sigma u_1 = \frac{R_{u_1}}{A_{F1}} = \frac{\frac{5P_{u_1}}{4}}{A_1\,B_1} = \frac{\frac{5 \times 69.300}{4}}{200 \times 240} = 1,80 \text{ K/cm}^2$$

$$\sigma u_2 = \frac{R_{u_2}}{A_{F2}} = \frac{P_{u_1} + P_{u_2} - R_{u_1}}{A_2\,B_2} = \frac{69.300 + 122.000 - 60.000}{200 \times 200} = 3,28 \text{ K/cm}^2$$

El diseño es como una viga longitudinal con las cargas σu_1 y σu_2 aplicadas hacia arriba, donde la viga o tira cumple función correctora entre las zapatas sin recibir carga alguna, aunque sí recibe solicitaciones provenientes de las zapatas, ver Fig. 7.45.

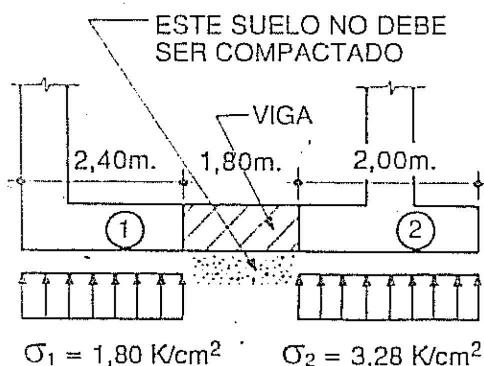


Figura 7.45

El cálculo como elemento longitudinal se muestra en la Fig. 7.46.

DISEÑO POR CORTE (Ver Fig. 7.46)

Por norma $v_{cu} = 0,85 \times 0,53\ \sqrt{210} = 6,52$ K/cm²

El esfuerzo cortante actuante máximo es 44.358 Kg.

$$v_{cu} = \frac{44.358}{200 \times d} \leq 6,52 \text{ K/cm}^2 \Rightarrow d \geq 34,01 \text{ cm.}$$

Se toma altura de zapata h = 50 cm.

DISEÑO POR FLEXION (Ver Fig. 7.46)

Zapata Nº1

Dirección larga

Mu = 61.046 Kg–m/2 m .=> As = 42,72 cm²/2 m. => Ø7/8" c/15 cm. Arriba

Mu = 7.200 Kg– m/ 2 m. => As = 5,03 cm²/ 2 m. < Asmín = 18 cm²/2 m.

Usar Ø 5/8" c /20 cm. Abajo

Dirección corta

$$M_u = \frac{\sigma u \times l^2}{2} = \frac{18.000 \times 1 \times (2-0,40)/2}{2} = 28.800 \text{ K–m.}$$

As = 20,16 cm²/m. => Usar Ø 7/8" c/15 cm. Abajo.

Zapata Nº2

Dirección larga

Mu = 15.984 Kg–m/2 m. => As = 11,18 cm²/2 m. => Ø 1/2" c/15 cm. Arriba.

Mu = 32.800 Kg–m/2 m. => As = 22,96 cm²/2 m. => Ø 5/8" c/15 cm. Abajo.

Dirección corta

$$M_u = \frac{\sigma u\ l^2}{2} = \frac{32.800 \times 1 \times 0,8^2}{2} = 10.496 \text{Kg–m} \Rightarrow \ldots$$

...=> As = 7,35 cm²/m.< Asmín = 9 cm²/m.

Usar Ø 5/8" c/20 cm. Abajo.

Ver diseño en la Fig. 7.48.

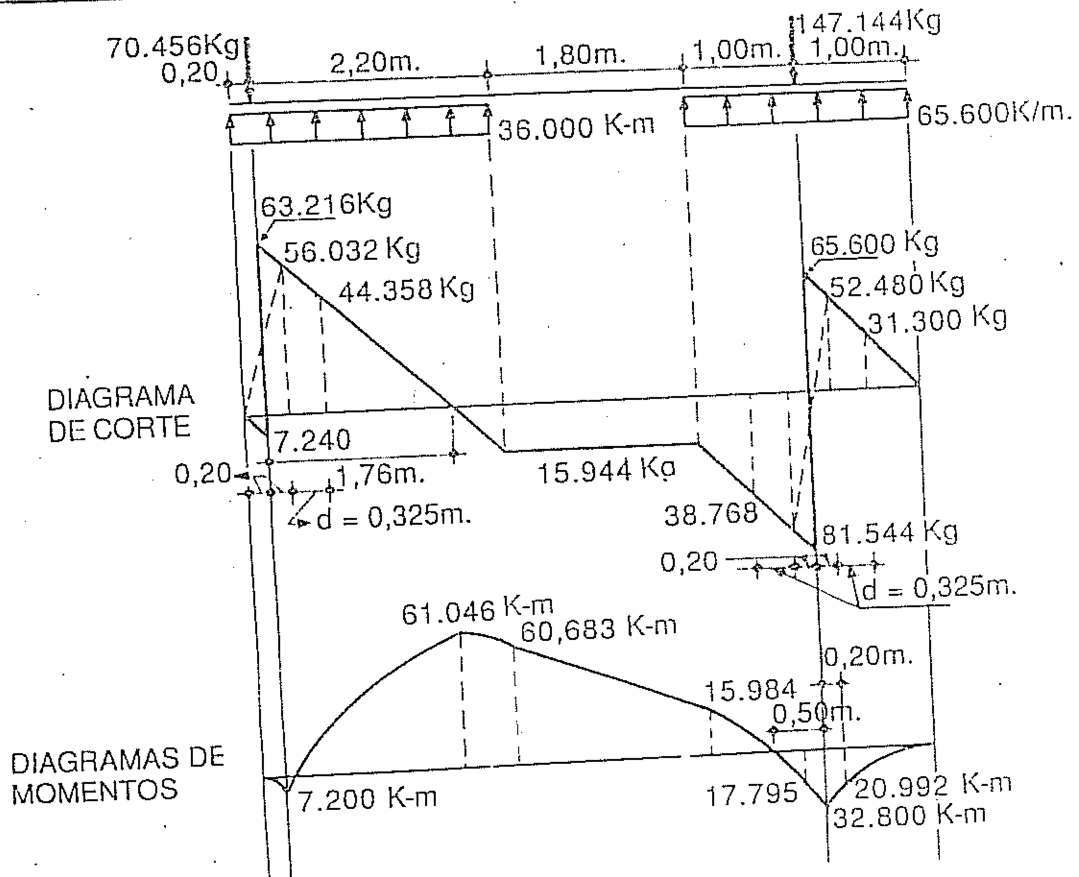


Figura 7.46

DISEÑO POR PUNZONAMIENTO (Ver Fig. 7.47)

Por norma $v_{cu} = 0{,}85\left(0{,}53 + \frac{1{,}06}{\beta_c}\right)\sqrt{f'_c} \leq 0{,}85 \times 1{,}06\sqrt{f'_c} = 13{,}07$ K/cm²

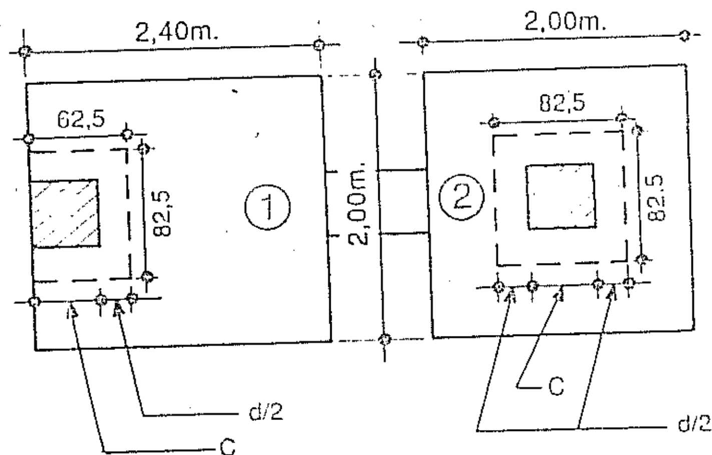


Figura 7.47

Para la columna Nº1

$\beta c_1 = 1 => v_{cu_1} = 19{,}58 \ \text{K/cm}^2 => v_{cu} = 13{,}07 \ \text{K/cm}^2$

$$v_{u_1} = \frac{70.456 - 18.000(0{,}40 + 0{,}43)(0{,}40 + 0{,}215)}{\left(2(40 + 21{,}5)\right)43} = 11{,}58 \ \text{K/cm}^2 < 13{,}07 \ \text{K/cm}^2$$

Para la columna Nº2

$\beta c_2 = 1 => v_{cu_2} = 19{,}58 \ \text{K/cm}^2 > 13{,}07 \ \text{K/cm}^2 => v_{cu} = 13{,}07 \ \text{K/cm}^2$

$$v_{u_2} = \frac{147.144 - 32.800(0{,}40 + 0{,}43)^2}{4(40 + 43)\ 43} = 8{,}72 \ \text{K/cm}^2 < 13{,}07 \ \text{K/cm}^2$$

DISEÑO DE LA VIGA

Determinación de la altura de la viga.

$$d = \sqrt{\frac{60.683}{35{,}18 \times 0{,}50}} = 58{,}74 \text{ cm.}$$ => Se toma viga de 50 x 50 cms.

Determinación de áreas de acero.

$A_{s_1} = 22{,}24 \text{ cm}^2$ y $A_{s_2} = 20{,}62 \text{ cm}^2$ => $A_{s,t} = 42{,}93 \text{ cm}^2$

$A'_s = 20{,}62 \text{ cm}^2$ $A_{smín} = 7{,}17 \text{ cm}^2$

Usar 9 Ø 1" en dos capas => Arriba

Usar 4 Ø 1" en una capa => Abajo

DISEÑO POR CORTE

$$v_u = \frac{19.544}{50 \times 43} = 9{,}09 \ \text{K/cm}^2 > 6{,}52 \ \text{K/cm}^2$$

$v_{su} = 9{,}09 - 6{,}52 = 2{,}57 \ \text{K/cm}^2$

Separación de los estribos

$$S = \frac{2 \times 0{,}71 \times 4.200}{2{,}57 \times 50} = 46 \text{ cm.}$$ => Usar estribos Ø3/8" c/20 cm.

Ver diseño en Fig. 7.48.

Figura 7.48

7 . 13 . 6 EJERCICIO Nº 9

Este ejemplo es para diseñar las longitudes de espigas y longitudes de desarrollo de una fundación que sobrepasa los esfuerzos de aplastamiento en el concreto entre la columna y la zapata, según las cargas y materiales dados, la columna es de 35 x 35 y la fundación de 2,50 m x 2,50 m., la zapata tiene una altura total de 50 cm. y cabillas Ø 5/8 c/15 cm. , ver Fig. 7.49.

Figura 7.49

$P_D = 80$ T. $P_L = 50$ T.
$f'c = 210$ K/cm² $fy = 4.200$ K/cm²
La columna fue diseñada con 4 Ø 1/2" de acero longitudinal.

Pu = 1,4 x 80 + 1,7 x 50 = 197 T.
Chequeo de aplastamiento en la columna.
Pmáx = 0,7 x (0,85 f'c Ag) = 0,7 x 0,85 x 210 x 35 x 35 = 153.063 Kg.

Pu = 197 T. > Pmáx = 153 T. => Hay exceso de carga, la diferencia deberá ser transferida a la zapata a través de aceros longitudinales al eje de la columna.

Chequeo del aplastamiento en la zapata.

$$F = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} = \sqrt{\frac{250 \times 250}{30 \times 30}} = 8{,}30 > 2 \Rightarrow F = 2$$

$$P_{máx} = F \times 0{,}7\ (0{,}85\ f'c\ A_1) = 2 \times 0{,}7 \times 0{,}85 \times 210 \times 35 \times 35 = 306.127\ Kg.$$

Pmáx > Pu => En la zapata no hay problemas de aplastamiento.

Area de acero requerida para la transmisión de los esfuerzos a la zapata.

$$A_s = \frac{P_u - P_{máx}}{\varnothing f_y} = \frac{197.000 - 153.063}{0{,}70 \times 4.200} = 14{,}94\ cm^2$$

Chequeo del área de acero mínimo según normas.
$A_{smín} = 0{,}005 \times 35 \times 35 = 6{,}13\ cm^2$ => Pero no menos de 4 cabillas.

Luego, usar 4 Ø 7/8" de espigas entre zapata y columna.
Longitud de desarrollo de las espigas en las columnas.
Las cabillas de Ø 1 1/2" deben solaparse con las espigas de Ø 7/8".
Las espigas de Ø 7/8" deben extenderse dentro de la columna una longitud no menor que la longitud de desarrollo de las cabillas Ø 1 1/2" de la columna o la de ellas mismas, luego:

Para Ø 1 1/2" (Longitud de desarrollo a compresión)

$$L_d = \frac{0{,}008\ \varnothing f_y}{\sqrt{f'c}}$$

$$L_d = \frac{0{,}008 \times 3{,}81 \times 4.200}{\sqrt{210}} = 88{,}3\ cm. > ...$$

$$... > 0{,}004\ \varnothing f_y = 0{,}004 \times 3{,}81 \times 4.200 = 64\ cm.$$

$L_{d\varnothing 1\,1/2"} = 88{,}3$ cm. ≈ 90 cm.

Para Ø 7/8"

$$Ld = \frac{0,08\ Ø\ fy}{\sqrt{f'c}}$$

$$Ld = \frac{0,08 \times 2,22 \times 4.200}{\sqrt{210}} = 51,5\ cm. > ...$$

$$... > 0,004\ Øfy = 0,004 \times 2,22 \times 4.200 = 37,3\ cm.$$

Luego, Ld = 51.5 cm.

Sin embargo esta longitud se puede reducir en razón de ser muy grande, ya que no cabría en la zapata. De acuerdo a la norma se puede reducir esta longitud por exceso de área colocado respecto a la requerida por cálculo.

$A_{s,req.} = 14,94\ cm^2$

$A_{s,coloc} = 4\ Ø7/8" = 4 \times 3,87\ cm^2 = 15,48\ cm^2$

$$\frac{A_{s,req}}{A_{s,coloc}} = \frac{14,98}{15,48} = 0,97$$

Luego, Ld = 0,97 x 51,5 cm. = 49,96 cm. => Ld = 0,50 m.

Como la zapata tiene 50 cm. de alto y las espigas se desrrollan una longitud vertical de 39,32 cm., tal como se ve en la Fig. 7.50.a, los esfuerzos de adherencia sobrepasan los normales ya que los ganchos a escuadra no se consideran para efecto de la longitud de desarrollo, entonces se requiere disminuir esta longitud de desarrollo con la disminución de diámetros más pequeños de espigas.

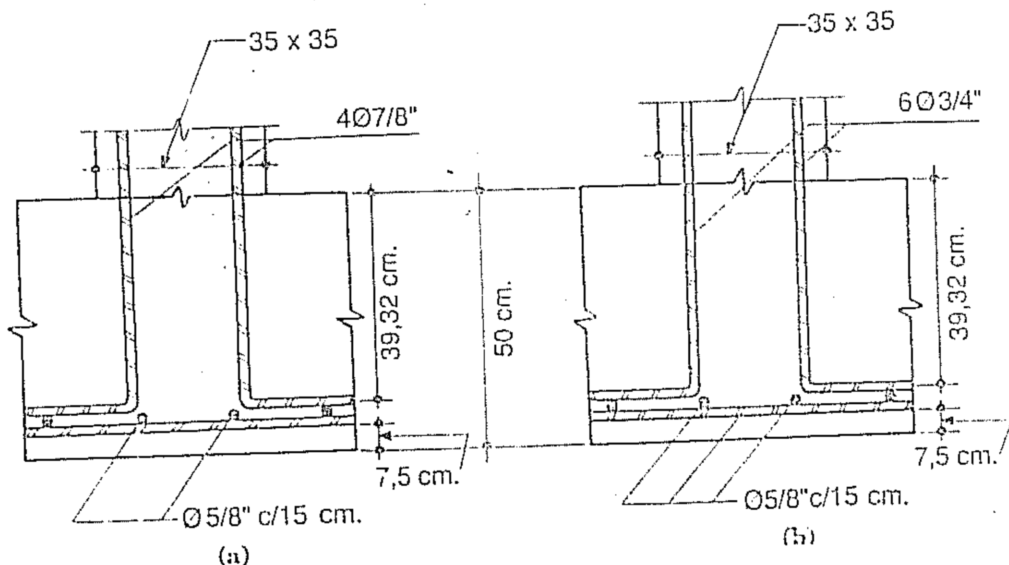


Figura 7.50

Probando 6 espigas de Ø 3/4" (Ver Fig. 7.50.b)

$$Ld = \frac{0{,}08\ Ø\ fy}{\sqrt{f'c}}$$

$$Ld = \frac{0{,}08 \times 1{,}9 \times 4.200}{\sqrt{210}} = 44{,}05\ cm. > \ldots$$

$$\ldots > 0{,}004\ Ø\ fy = 0{,}004 \times 1{,}9 \times 4.200 = 31{,}92\ cm.$$

Ld = 44 cm.
Reducción de la longitud de desarrollo

$As_{,req} = 14{,}94\ cm^2$

$As_{,coloc} = 6 \times 2{,}84\ cm^2 = 17{,}04\ cm^2$

$$Ld = 44 \times \frac{14{,}94}{17{,}04} = 38{,}5\ cm. \Rightarrow \text{Longitud mínima requerida}$$

Se tiene que Ld = 38,7 cm. > 39,32 cm. *OK*

Utilizar 6 Ø 3/4" como espigas con una longitud vertical de 90 cm. más 38,7 cm. para ser un total de 128,7 cm., y un gancho a escuadra de 20 cm., es decir 6 Ø 3/4" x 1,50 m. (Ver Fig. 7.51)

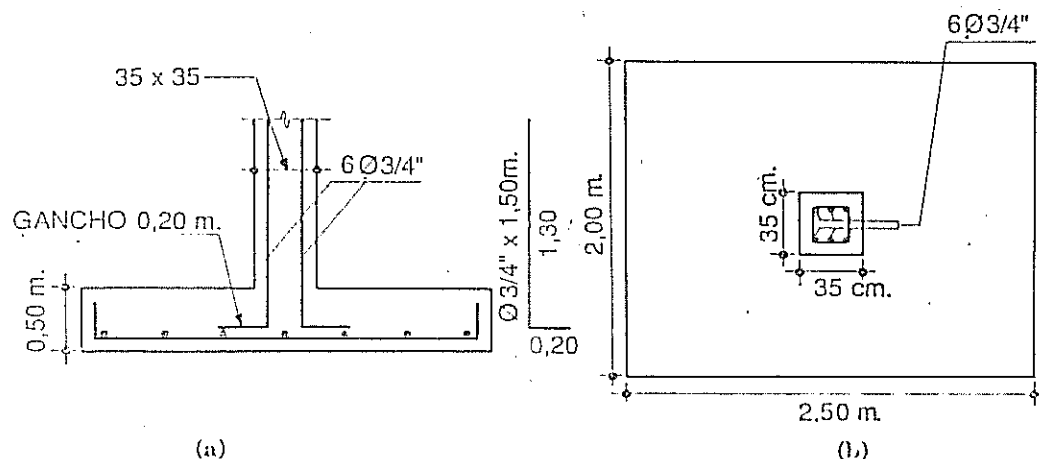


Figura 7.51

7 . 13 . 7 EJERCICIO Nº 10

Este ejemplo es para diseñar una fundación sometida a fuerza cortante horizontal en la base de la columna o pedestal, según las cargas y materiales dados, la columna o pedestal y la zapata de fundación son iguales al caso anterior y la fuerza cortante horizontal es de 40 T., actuando en el tope de la zapata, ver Fig. 7.52.

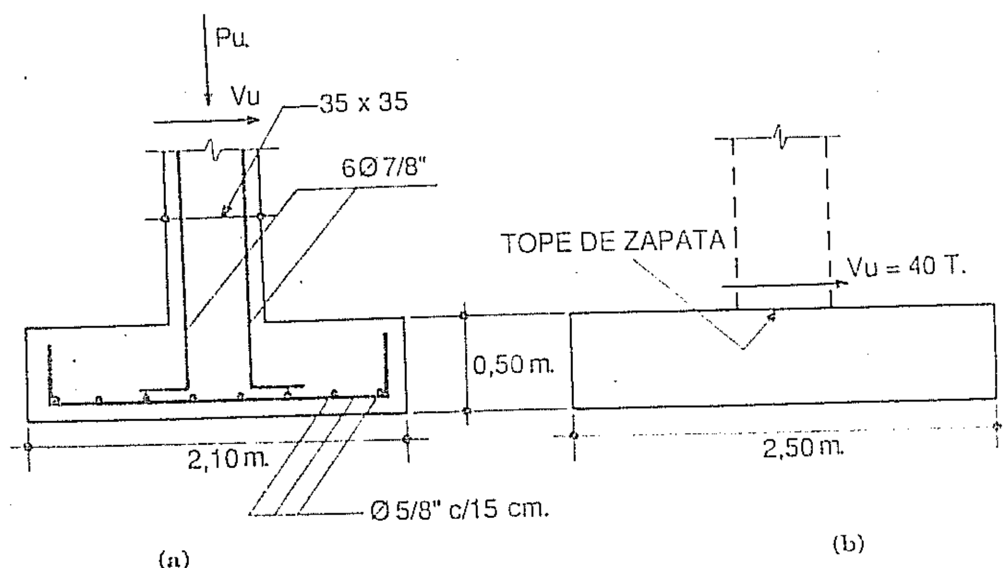


Figura 7.52

DATOS

P_D = 80 T. P_L = 50 T.

f'c = 210 K/cm² fy = 4.200 K/cm²

Columna de 35 x 35

La resistencia al corte por fricción de acuerdo a las normas permite que,

$V_u \leq Ø A_{vf} f_y \mu$ *(A. 11. 6. 3)*

A_{vf} = Area de las cabillas que resistan el corte.

Donde,

μ = 1,4 para vaciados monolíticos

μ = 1,00 para vaciados por etapas. *(A. 11. 6. 4)*

En este caso μ = 1,00 ya que se considera que se vació primero la zapata y luego el pedestal, como se acostumbra generalmente.

Luego, $A_{vf} = \dfrac{V_u}{Ø\, f_y\, \mu} = \dfrac{40.000}{0{,}85 \times 4.200 \times 1{,}00} = 11{,}20 \text{ cm}^2.$

Según el problema anterior, se tienen 6 espigas de Ø 7/8"que equivalen a 17,04 cm²., por lo tanto no se requiere acero adicional por la fuerza cortante horizontal.

Sin embargo, según las normas se requiere chequeo de la longitud de desarrollo a tensión de las espigas de Ø 3/4".

Luego,

$$Ld = \frac{0,06\ As\ fy}{\sqrt{210}}$$

$$Ld = \frac{0,06 \times 2,84 \times 4.200}{\sqrt{210}} = 49,39 > 0,006\ Øfy = 0,006 \times 1,9 \times 4.200 = 47,88\ cm.$$

Luego, $Ld = 49,39$ cm.

Sin embargo, aplicando la norma se puede disminuir esta longitud por exceso de área.

$As_{req} = 16,80\ cm^2$

$As_{coloc} = 6 \times 3,87\ cm^2 = 23,22\ cm^2$

Entonces:

$$Ld = 49,39 \times \frac{11,20}{23,32} = 23,82\ cm. < 38,7\ cm.$$ *OK*

Chequeo de la máxima fuerza cortante permitida

$Vu \leq Ø\ (0,2\ f'c\ Ac) \leq Ø\ 56\ Ac$ *(A.11.6.4)*

Donde, Ac = Area de la sección de concreto que resiste el corte

Luego;

$Vu_{máx} \leq 0,85 \times 0,2 \times 210 \times 35 \times 35 = 43.733$ Kg. < ...

...$< 0,85 \times 56 \times 35 \times 35 = 58.310$ Kg.

Luego, $Vu_{máx} = 43.733$ Kg.

El corte actuante $Vu = 40$ T. $< Vu_{máx} = 43.7$ T. *OK*

En caso que fuera mayor se tendría que aumentar la dimensión de la columna o pedestal.

CAPITULO VIII

Cabezales

8.1 INTRODUCCION

Los cabezales se consideran como zapatas de fundación que se encuentran apoyados sobre pilotes, diferenciándose de la zapata y del tipo de la zapata directa en razón de que no acepta ninguna contribución del suelo inmediatamente en contacto con el cabezal. Se establece que los cabezales, deberán tener la forma geométrica mas sencilla posible que abarque los pilotes de apoyo con el fin de ubicar y desarrollar los esfuerzos sobre el cabezal a su más mínima intensidad.

8.2 TIPOS DE CABEZALES

La forma geométrica del cabezal vendrá en función del número de pilotes que lo estén apoyando, siendo entre otras formas generales las mostradas en la Fig. 8.1 y detallado por su geometría en los cabezales mostrados en la Fig. 8.2.

Se toma como máximo doce (12) pilotes para hacer la consideración del cabezal como un sólo cuerpo rígido y el tamaño del cabezal dependerá de la separación mínima "S" entre pilotes, la cual está regida por el tipo de suelo y la forma de trabajar sea a punta o a fricción, pudiendo adoptarse la relación siguiente:

TRABAJO DEL PILOTE	SEPARACION MINIMA CENTRO A CENTRO DE PILOTES
De punta en suelo duro	$2\O_p \leq S \leq 2{,}5\O_p$ ó $S \geq 0{,}75$ m.
De punta sobre lecho rocoso	$S \leq 2\O_p$ ó $S \geq 0{,}60$ m.
De fricción	$3\O_p \leq S \leq 5\O_p$ ó $S \geq 1{,}00$ m.
	Donde $\O_p$ = diámetro del pilote

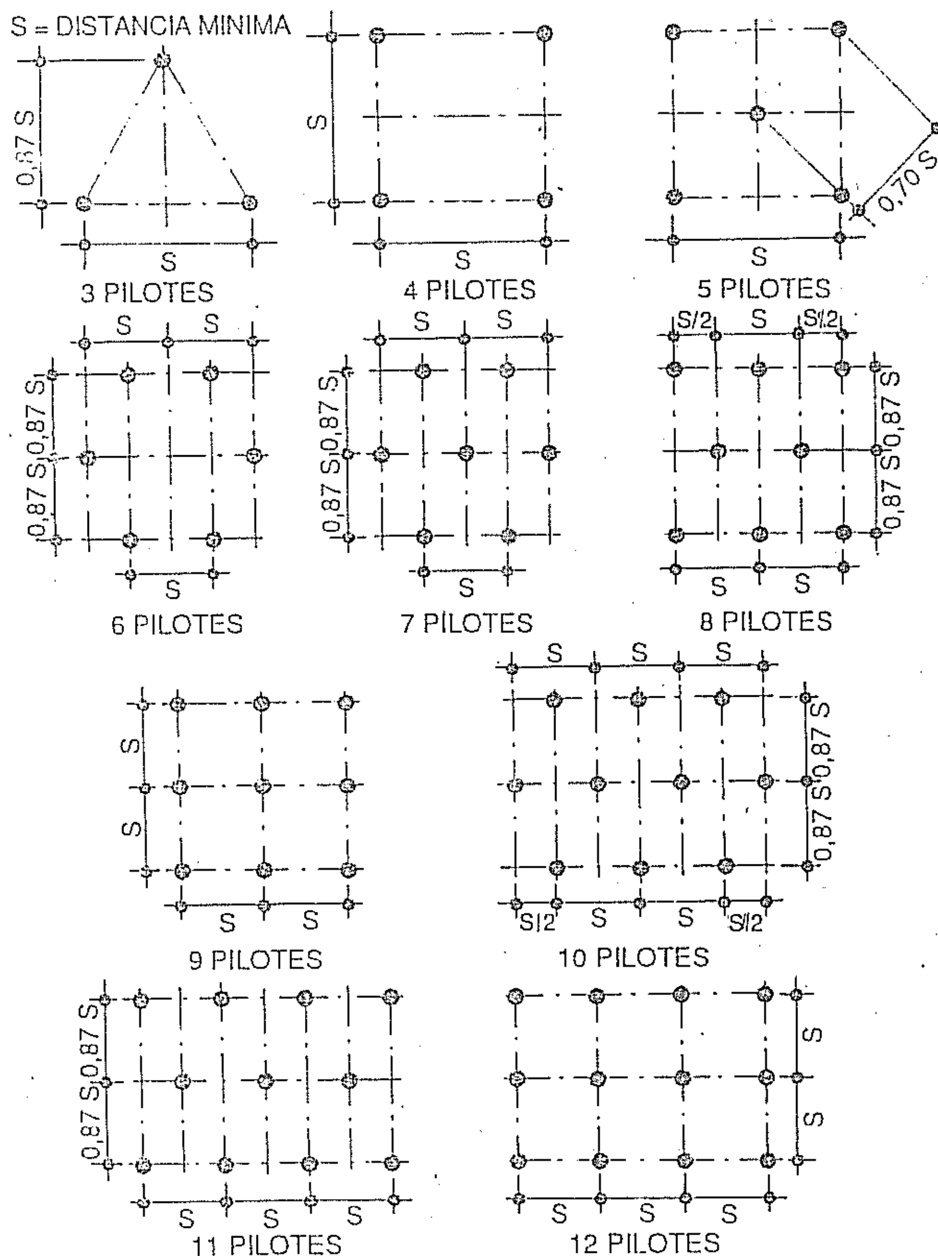
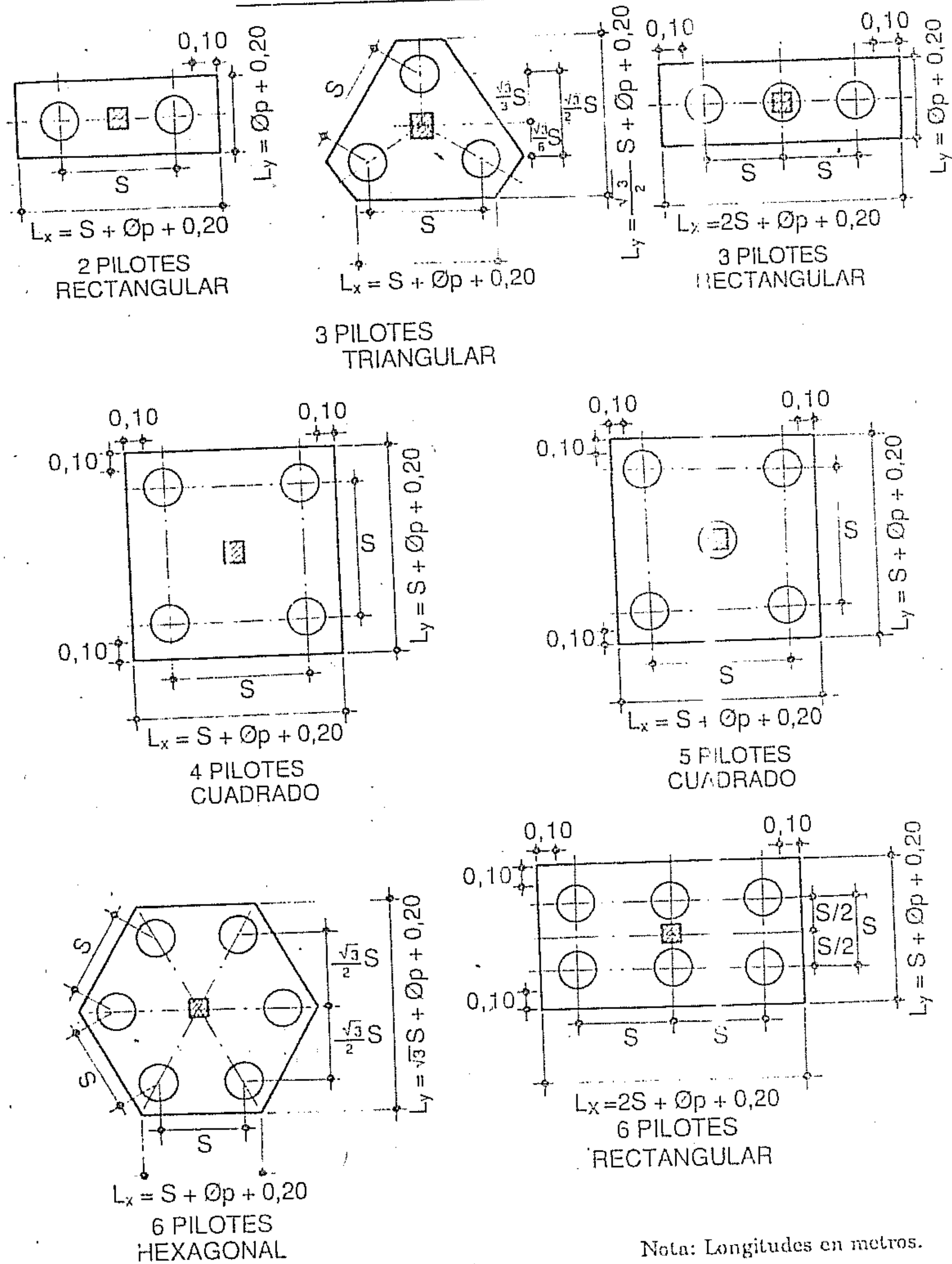


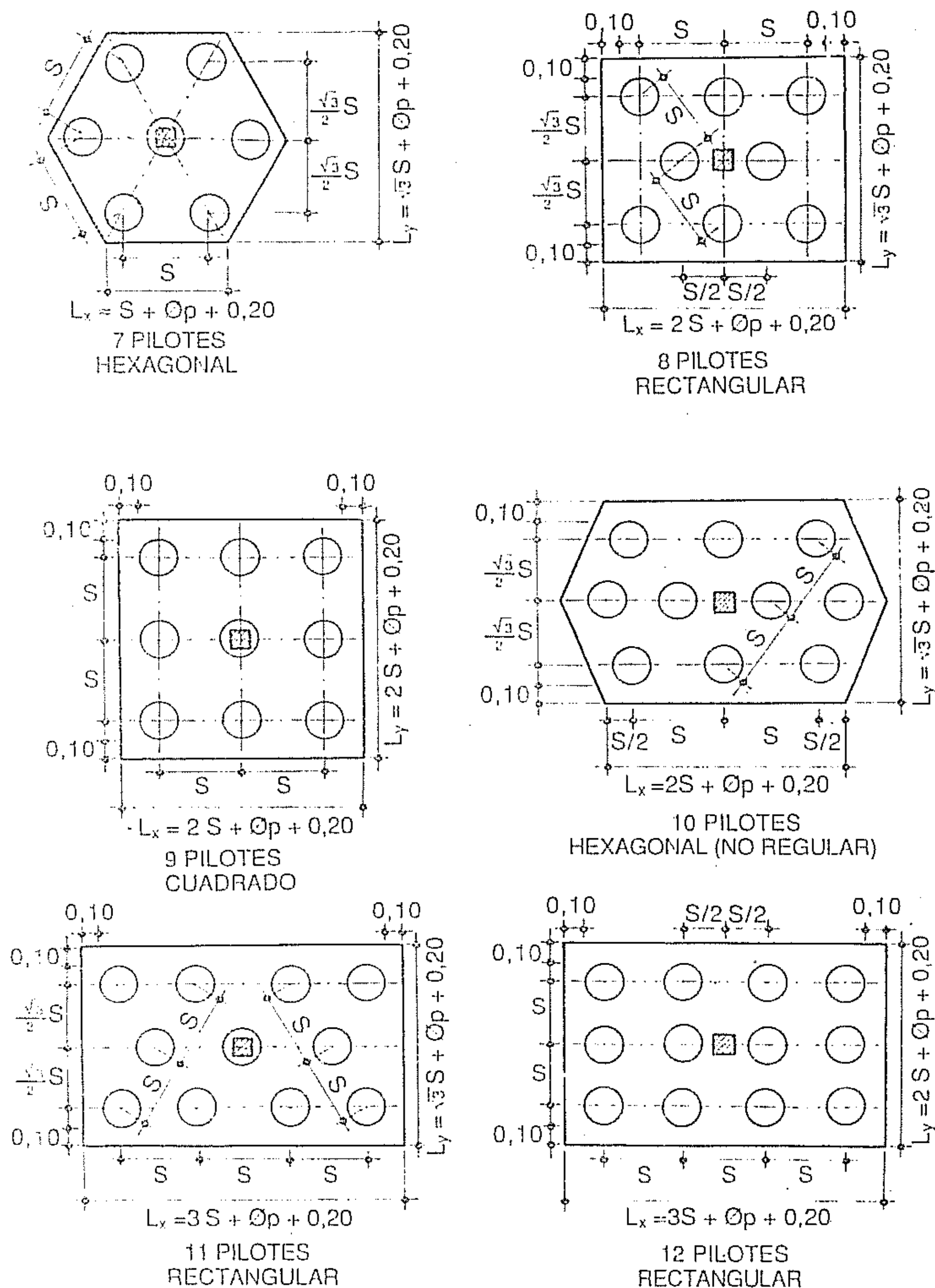
Figura 8.1

Para el diseño de los cabezales se han planteado distintos procedimientos e hipótesis, siendo el más aceptado el método de las bielas y el poco usado método de flexión como viga apoyada sobre pilotes, método cuestionado por



Nota: Longitudes en metros.

Figura 8.2



Nota: Longitudes en metros.

Figura 6.2

no considerar que son vigas de gran altura y que en ellas no se cumple la hipótesis de la conservación de las secciones planas.

En todo caso los cabezales se pueden dividir en dos tipos: viga-cabezales y cabezales rígidos.

8.3 VIGAS-CABEZALES

Las vigas-cabezales son aquellos cabezales que conectan las columnas con los pilotes y que por su geometría trabajan a flexión, ya que la relación de altura útil "d" de la viga-cabezal sea tal que la recta que une al centro de la base de arranque de la columna o pedestal con el centro de la sección superior del pilote forme con la vertical un ángulo superior a 40º sexagesimales, ver Fig. 8.3.

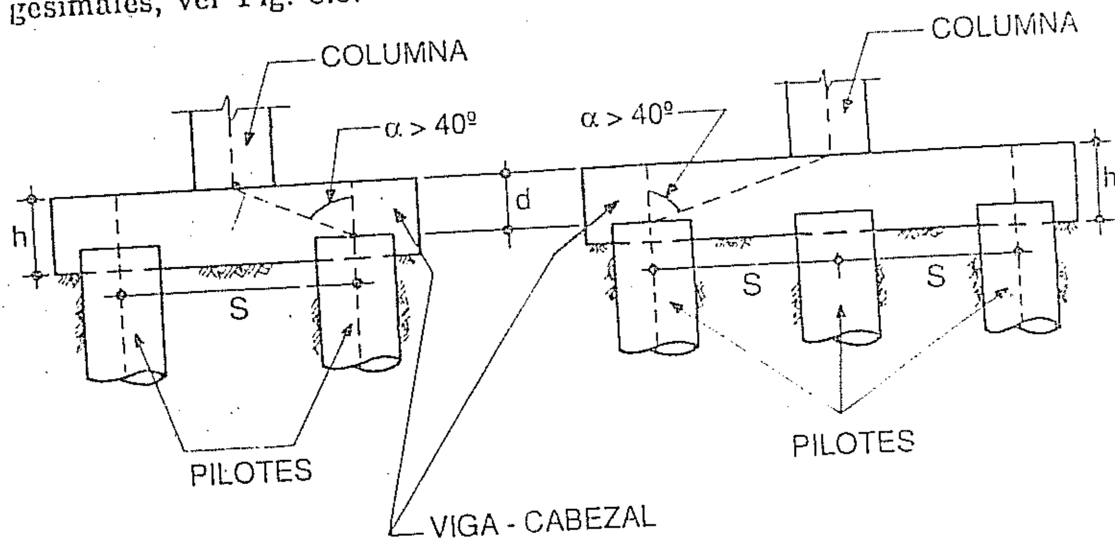


Figura 8.3

En estos casos se considera a la viga-cabezal trabajando a los efectos de flexión, corte y corte por punzonamiento, de manera similar como trabajan las zapatas de las fundaciones directas.

Las vigas-cabezales no transmiten ningún tipo de esfuerzos directos al suelo, sólo lo hacen a través de los pilotes.

8.4 CABEZALES RIGIDOS

Con la finalidad de tener un cuerpo rígido que no trabaje a flexión y que conecte el suelo con las columnas de la estructura a través de los pilotes, se crea un miembro monolítico llamado cabezal rígido, el cual no tiene contacto activo con el suelo, salvo que éste lo bordea por estar bajo tierra (condición no obligante ya que puede ser también supeficial) y que asegura la transmisión de las solicitaciones de la superestructura hacia el terreno.

Las normas permiten considerar los cabezales rígidos trabajando sólo a tensión si se cumple que la relación de altura útil "d" sea tal que la recta que une al centro de la base de arranque de la columna o pedestal con el centro de la sección superior del pilote forme con la vertical un ángulo inferior a 40º sexagesimales, ver Fig. 8.4.

El cálculo de solicitaciones en cabezales se realiza por el Método de los Bielas, el cual se expone a continuación.

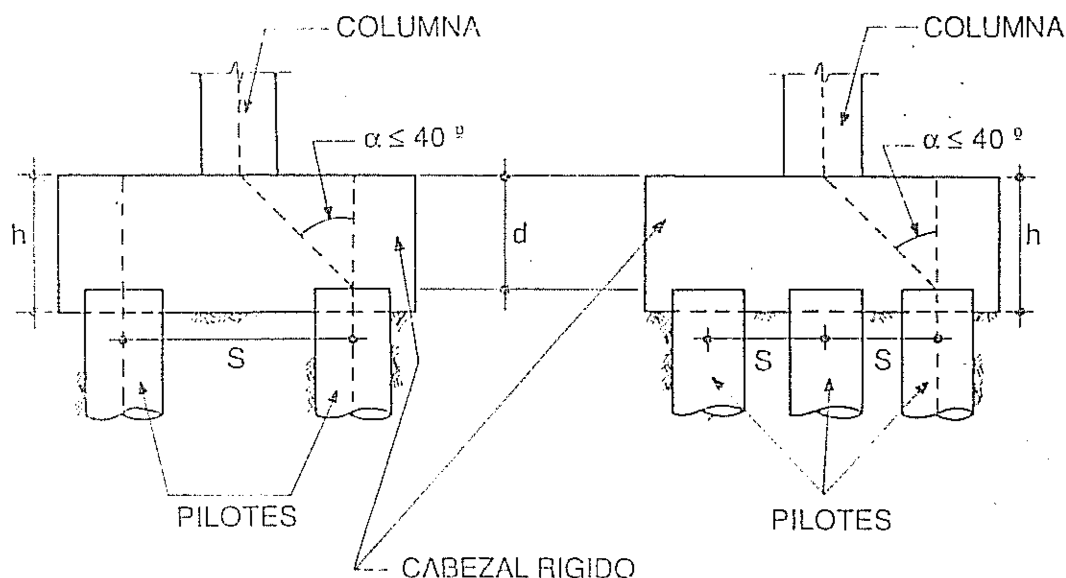


Figura 8.4

8.5 METODO DE LOS BIELAS

El método de los bielas consiste en descomponer horizontalmente, la reacción máxima vertical máxima previsible del pilote según la dirección de la línea recta que une al centro de la base de arranque de la columna o pedestal con el centro de la sección superior del pilote, ésta reacción horizontal a tracción deberá ser absorbida con el refuerzo inferior en la dirección de los pilotes.

Para aplicar este método, se tiene en consideración los siguientes fundamentos:

a .- El cabezal se considera que es perfectamente rígido.

b .- La conección entre el cabezal rígido y cada pilote se considera una articulación, es decir, no hay posibilidad de traspaso de momentos flectores de la columna al pilote, igual tipo de conección se considera entre la sección inferior de la columna y el cabezal.

c .- El pilote sólo tiene capacidad de generar reacciones en la dirección de su propio eje.

d .- Las cargas de las columnas son transmitidas a los pilotes por medio de bielas trabajando a compresión que van desde el centro de las columnas hasta el centro del pilote.

e .- Estas bielas generan un equilibrio de fuerzas verticales entre las cargas que transmiten y la carga que los pilotes reciben, ver Fig. 8.5.

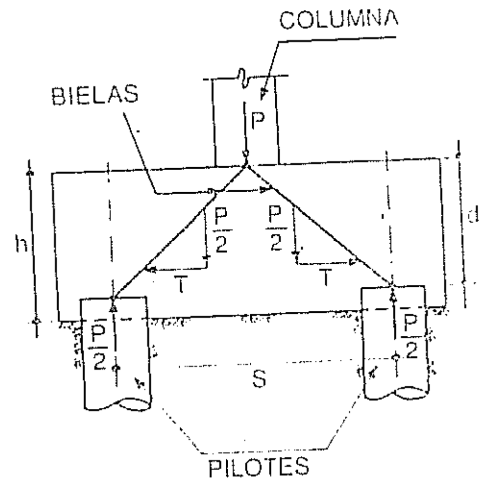


Figura 8.5

f .- Por experimento de laboratorio se ha demostrado que la falla en distintos cabezales rígidos se origina en el plano M por tracción (fuerza T) en dicho plano, por efectos de adherencia y anclaje, ver Fig. 8.6, luego, se deben anclar las cabillas subiendo por los bordes hasta la cara superior, ver Fig. 8.7.

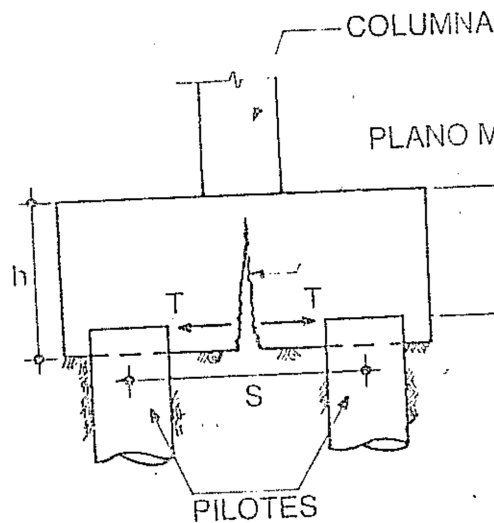


Figura 8.6

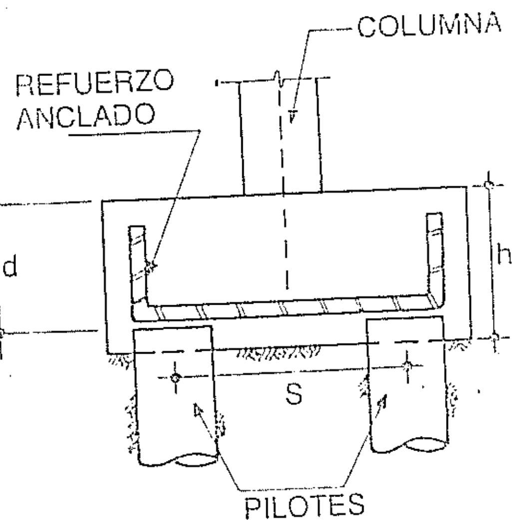


Figura 8.7

8.6 DETERMINACION DE LA FUERZA T DE TRACCION EN CABEZALES RIGIDOS

A continuación se dan las soluciones para la determinación del valor de

la fuerza T de tracción para distintos casos de distribución de pilotes, desde número de dos hasta número de doce, con la misma distribución de pilotes de los tipos de cabezales comentados en el Pto. 8.2.

8.6.1 CABEZAL PARA DOS PILOTES *(RECTANGULAR)*

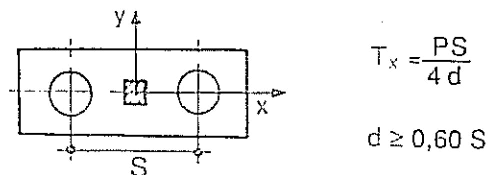


Figura 8.8

8.6.2 CABEZAL PARA TRES PILOTES *(TRIANGUALAR)*

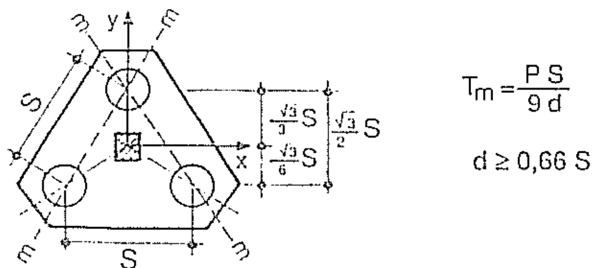


Figura 8.9

8.6.3 CABEZAL PARA TRES PILOTES *(RECTANGULAR)*

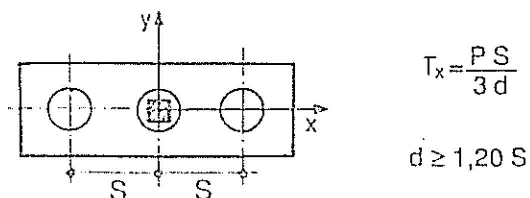


Figura 8.10

8.6.4 CABEZAL PARA CUATRO PILOTES *(CUADRADO)*

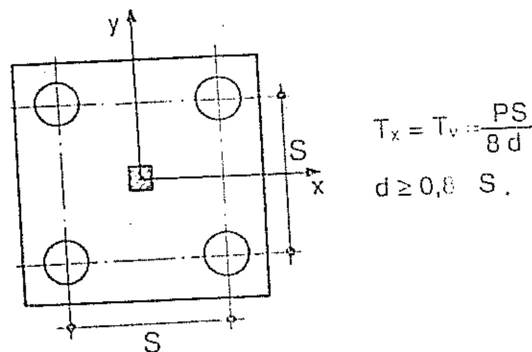


Figura 8.11

8.6.5 CABEZAL PARA CINCO PILOTES *(CUADRADO)*

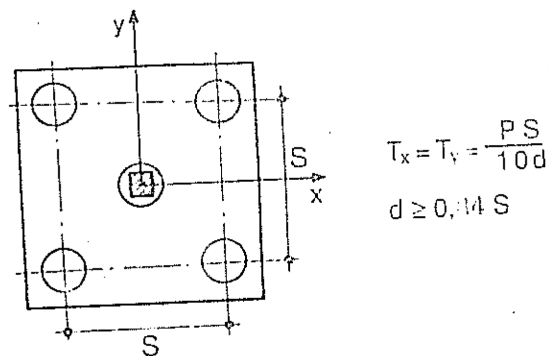


Figura 8.12

8.6.6 CABEZAL PARA SEIS PILOTES *(HEXAGONAL)*

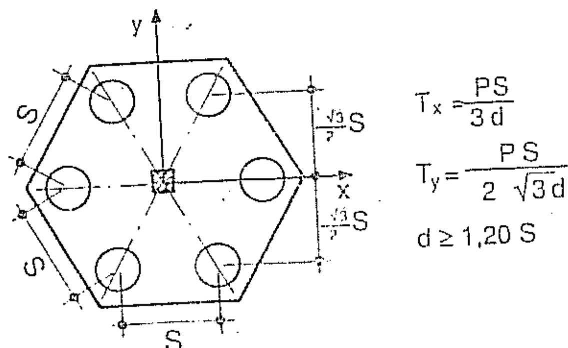
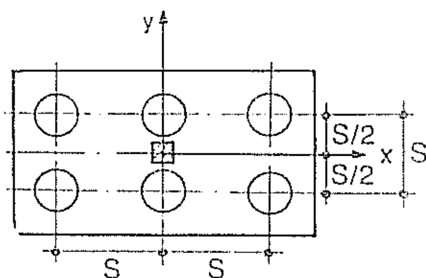


Figura 8.13

8.6.7 CABEZAL PARA SEIS PILOTES *(RECTANGULAR)*



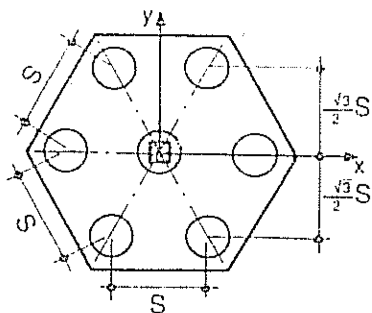
$$T_x = \frac{PS}{3d}$$

$$T_y = \frac{PS}{4d}$$

$$d \geq 1{,}33\ S$$

Figura 8.14

8.6.8 CABEZAL PARA SIETE PILOTES *(HEXAGONAL)*



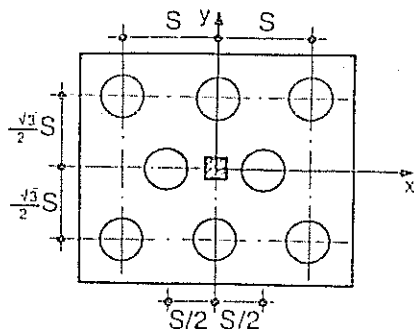
$$T_x = \frac{2PS}{7d}$$

$$T_y = \frac{3PS}{7\sqrt{3}\,d}$$

$$d \geq 1{,}20\ S$$

Figura 8.15

8.6.9 CABEZAL PARA OCHO PILOTES *(RECTANGULAR)*



$$T_x = \frac{5PS}{16d}$$

$$T_y = \frac{9PS}{16\sqrt{3}\,d}$$

$$d \geq 1{,}57\ S$$

Figura 8.16

8.6.10 CABEZAL PARA NUEVE PILOTES *(CUADRADO)*

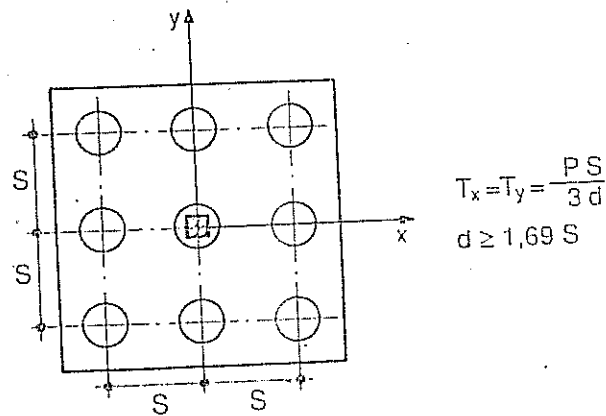


Figura 8.17

8.6.11 CABEZAL PARA DIEZ PILOTES *(HEXAGONAL NO REGULAR)*

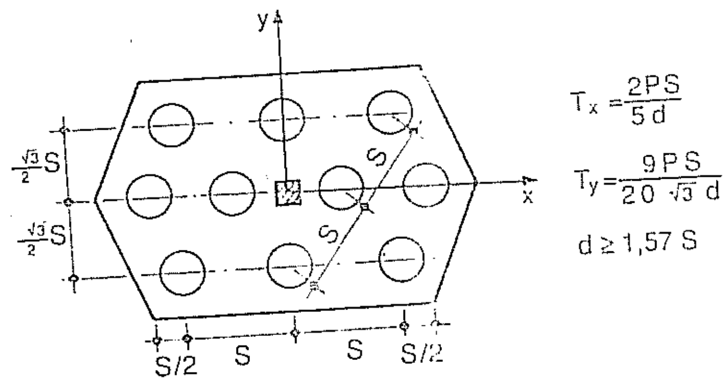


Figura 8.18

8.6.12 CABEZAL PARA ONCE PILOTES *(RECTANGULAR)*

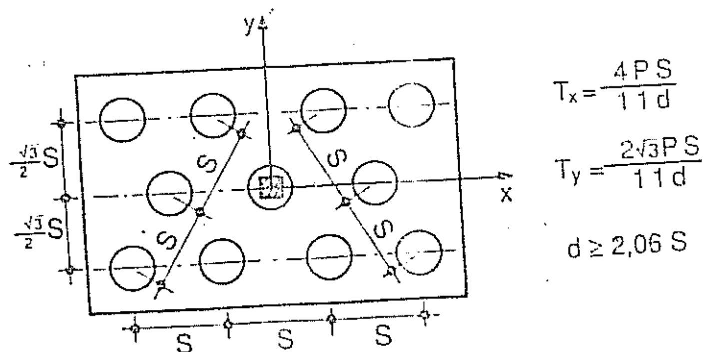
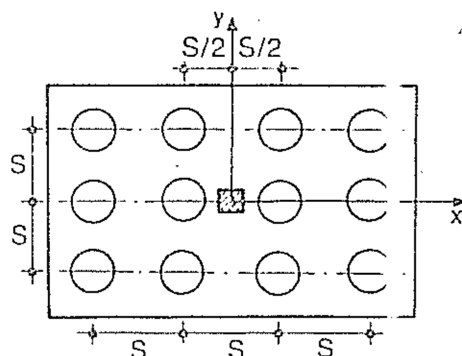


Figura 8.19

8.6.13 CABEZAL PARA DOCE PILOTES *(RECTANGULAR)*



$$T_x = \frac{PS}{2d}$$

$$T_y = \frac{5PS}{12d}$$

$$d \geq 2{,}15\,S$$

Figura 8.20

8.7 DETERMINACION DE LA FORMA DEL CABEZAL Y DEL NUMERO DE PILOTES REQUERIDOS

La forma del cabezal y el número de pilotes va directamente relacionado con la capacidad resistente del o los pilotes que se utilizarán.

No existe ninguna regla fija para la determinación de la capacidad resistente última de un pilote, ya que debido a las fallas de ejecución del mismo, a la disgregación del material al vaciarse, a la perdida y mezcla del concreto simple con la tierra, etc., salvo el caso de pilotes hincados, siempre que fueran trabajados correctamente.

Sin embargo, es posible determinar empíricamente y con aproximaciones siempre dentro del rango de la seguridad las capacidades resistentes, fijando algunos parámetros.

8.7.1 CAPACIDAD RESISTENTE DE PILOTES

Como se dijo antes es necesario asentar ciertos criterios, para llegar a un valor aproximado y que en todo caso, siempre la capacidad resistente de los pilotes estará sujeta a la palabra final de un detallado estudio de suelo y la opinión de un profesional de la especialidad.

8.7.1.1 CRITERIOS PARA DEFINIR LA CAPACIDAD DE PILOTES

a .- Se toma como área efectiva (A_e) del concreto en un pilote vaciado en sitio, su diámetro descontando 10 cm. a cada lado, estimándose que $A_e = 0{,}9\ A_g$.

b .- Se toma el concreto trabajando a un 50% de la resistencia según el di-

seño de mezcla propuesto, por razones de posibilidad de mezcla entre concreto y tierra, es decir, $f_c = 0{,}5\ f'_c$

c .- Se desprecia la capacidad de aporte de carga a las armaduras longitudinales del pilote, fijándose como porcentaje mínimo de acero el 5‰ del área gruesa (0,005 Ag) y nunca menor de seis (6) cabillas longitudinales.

Luego:

$P_{up} = \varnothing\,(0{,}5\ f'_c\ A_e)$ Donde $\varnothing = 0{,}70$

Pero $A_g = \dfrac{\pi\,\varnothing_p^2}{4} = 0{,}79\,\varnothing_p^2 \Rightarrow A_e = 0{,}9\,A_g = 0{,}9 \times 0{,}79\ \varnothing_p^2 = 0{,}711\ \varnothing_p^2$

Sustituyendo Ag en la expresión de capacidad de carga última Pup.

$P_{up} = 0{,}7\left(0{,}5\ f'_c\ 0{,}71\ \varnothing_p^2\right) = 0{,}248\ f'_c\ \varnothing_p^2$

Tomando concreto $f'_c = 180$ K/cm² se tiene entonces una expresión general de capacidad de pilote Pu:

$P_{up} = 44{,}6\,\varnothing_p^2$

Por lo tanto, de manera aproximada se puede tomar como capacidad resistente última del pilote Pup la expresión:

$P_{up} = 45\,\varnothing_p^2$ Donde, $\varnothing_p$ = Diámetro del pilote en cm. y los resultados son en Kg.

8.7.1.2 DETERMINACION DEL NUMERO DE PILOTES

No hay regla fija para la determinación del número de pilotes, siendo sólo función de tipo y diámetro que se tenga a disposición, por lo cual, a continuación se darán algunas reglas prácticas para su escogencia.

a .- Se determina la carga axial última actuante mayorada de diseño Pu proveniente de la columna.

b .- Se mayora con un 10% la Pu para considerar el peso propio del cabezal, vigas de riostras, losa de piso, otros elementos y sobrecargas en la planta baja.
Nota: En algunos casos el 10% se queda corto, debiendo modificarse oportunamente.

c .- Se debe tener fijado el diámetro disponible del pilote a utilizar o de lo contrario se escoje el diámetro, en todo caso se conoce la capacidad de carga del pilote Pup.

d .- Se divide la carga máxima actuante mayorada Pu entre la capacidad de carga del pilote Pup y se obtiene el mínimo número "n" de pilote, pero nunca mayor de doce (12) pilotes, donde "n" tiene la siguiente expresión.

$$n = \frac{1{,}10\ Pu}{Pup} = \frac{1{,}10\ Pup}{45Ø^2} \leq 12$$

e .- Conocido el número "n" de pilotes se diseña el cabezal ya sea como viga-cabezal o cabezal rígido, según sea el caso.

8 . 7 . 1 . 3 CAPACIDAD DE CARGA A DIAMETRO DE PILOTE

A continuación se dá una tabla práctica que indica las capacidades de carga de pilotes para distintos diámetros.

TABLA 8.I

CAPACIDAD DE CARGA – DIAMETRO DE PILOTE

DIAMETRO $Ø_p$ (cm)	AREA $A_g = 0{,}79\ Ø_p^2$ (cm^2)	CAPACIDAD DE CARGA $P_{up} = 45\ Ø^2$ (Ton.)
42	1.394	79
50	1.975	112
52	2.136	121
55	2.390	136
57	2.567	146
60	2.844	162
65	3.338	190
70	3.871	220
80	5.056	288
90	6.399	364
100	7.900	450
110	9.560	544

8 . 7 . 1 . 4 CARGA A DIAMETRO Y NUMERO DE PILOTES

A continuación se dá una tabla práctica que indica el número "n" de pilotes para distintas relaciones de cargas de diseño Pu a diámetro de pilotes Øp.

TABLA 8.II

RELACION CARGA – DIAMETRO Y NUMERO DE PILOTES

DIAMETRO Øp (cm.)	NUMERO n DE PILOTES — CARGA Pu (Ton.)											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
42	179	158	237	316	395	474	553	632	711	790	869	948
50	112	224	336	448	560	672	784	896	1.008	1.120	1.232	1.344
52	121	242	363	484	605	726	847	968	1.089	1.210	1.331	
55	136	272	408	544	680	816	952	1.088	1.224	1.360		
57	146	292	438	584	730	876	1.022	1.168	1.314			
60	162	324	486	684	810	972	1.134	1.296				
65	190	380	576	760	950	1.140	1.330					
70	220	440	660	880	1.100	1.320						
80	288	576	864	1.152	1.440							
90	364	728	1.092	1.456								
100	450	900	1.350									
110	544	1.088										

8.7.2 DETERMINACION DE LA FORMA DEL CABEZAL

La forma geométrica del cabezal está restringida directamente al número "n" de pilotes requeridos para soportar la carga, las normas restringen el uso de no mas de doce (12) pilotes por cabezal, las formas se mostraron en la Fig. 8.2.

8.8 CABEZALES CON EXCENTRICIDADES EN UNA O DOS DIRECCIONES

Las columnas se encuentran solicitadas por cargas axiales, cortes y momentos, los cuales son utilizados para su diseño, éstas solicitaciones a su vez deben ser transmitidas a otros elementos o al mismo cabezal dependiendo de su capacidad.

Hay varios criterios para estas consideraciones, todos con suficientes argumentos para poder aceptar cada uno por separado.

8.8.1 TRANSMISION DE MOMENTOS A LAS VIGAS DE RIOSTRAS

Algunos proyectistas estructurales consideran que las vigas de riostras deben absorber la totalidad de los momentos que llegan a los cabezales, diseñándose las vigas de riostras para absorber las posibles fuerzas de

tracción horizontales de la estructura y los momentos provenientes de la columna, para un estudio detallado remítase al Cap. IX de vigas de riostras en esta misma edición.

8.8.2 TRANSMISION DE MOMENTOS AL SUELO

Consideran algunos proyectistas estructurales que un cabezal está rodeado de un suelo compactado que es capaz de absorber los momentos provenientes de las columnas.

Esta suposición podría ser bastante cercano a la verdad, siempre que el material cercano al cabezal no haya sido perturbado o en su defecto se le compacte perfectamente, en todo caso debe prevalecer la opinión de un profesional de la especialidad.

8.8.3 TRANSMISION DE MOMENTOS AL CABEZAL

También es un diseño para algunos proyectistas estructurales, la transmisión total de las solicitaciones de la columna al cabezal y este a su vez a los pilotes en forma de cargas axiales puras.

El procedimiento implica que cada pilote reciba una carga distinta la cual será directamente proporcional a la distancia que se encuentre el pilote respecto al centro del cabezal, en este caso se toma la carga a compresión va a recibir el pilote mas alejado y se asume que todos los pilotes reciben la misma carga (teniendo en cuenta que se utiliza el mismo diámetro para todos los pilotes, por lo tanto cada pilote podrá desarrollar la misma capacidad de carga).

El método consiste entonces en convertir el efecto del o los momentos (en dirección X e Y) y el efecto de la carga axial en un Carga Axial Pura Equivalente simbolizada como "Pue" y diseñar con ésta carga por los métodos ya expuestos.

A continuación se expone el método tomando como ejemplo un cabezal típico de cuatro (4) pilotes, tal y como se observa en la Fig. 8.21.

Entonces, se toma como Carga Axial Pura Equivalente Pue

$$P_{ue} = 4\,(P_{up} + P_{máx_x} + P_{máx_y}) = 4\left(\frac{P_u}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{M_{ux}}{S} + \frac{1}{2}\,\frac{M_{uy}}{S}\right)$$

Donde Mu se refiere a momento último a la altura del pilote.
Para cada forma de cabezal y número de pilotes la expresión varía, por lo tanto en la TABLA 8.III de Cargas Axiales Puras Equivalentes se presentan las distintas soluciones para cada caso.

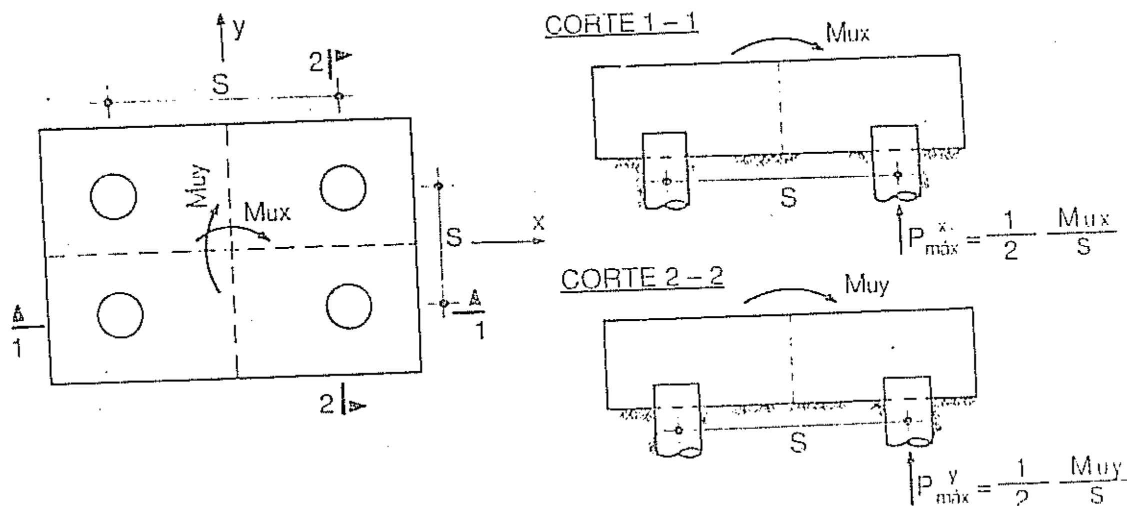


Figura 8.21

TABLA 8.III CARGAS AXIALES PURAS EQUIVALENTES

NUMERO DE PILOTES *FORMA DEL CABEZAL*	CARGA AXIAL PURA EQUIVALENTE Pue
DOS (2) PILOTES *RECTANGULAR*	$2\left(\frac{Pu}{2} + \frac{Mux}{S}\right)$
TRES (3) PILOTES *HEXAGONAL*	$3\left(\frac{Pu}{3} + \frac{Mux}{S} + \frac{2\,Muy}{\sqrt{3}\,S}\right)$
TRES (3) PILOTES *RECTANGULAR*	$3\left(\frac{Pu}{3} + \frac{Mux}{2\,S}\right)$
CUATRO (4) PILOTES *CUADRADO*	$4\left(\frac{Pu}{4} + \frac{Mux}{2\,S} + \frac{Muy}{2\,S}\right)$
CINCO (5) PILOTES *CUADRADO*	$5\left(\frac{Pu}{5} + \frac{Mux}{2\,S} + \frac{Muy}{2\,S}\right)$
SEIS(6) PILOTES *HEXAGONAL*	$6\left(\frac{Pu}{6} + \frac{Mux}{2\,S} + \frac{Muy}{2\sqrt{3}\,S}\right)$

TABLA 8.III (CONTINUACION)

NUMERO DE PILOTES *FORMA DEL CABEZAL*	CARGA AXIAL PURA EQUIVALENTE P_{ue}
SEIS (6) PILOTES *RECTANGULAR*	$6\left(\frac{P_u}{6} + \frac{M'_{ux}}{4\,S} + \frac{M'_{uy}}{2\sqrt{3}\,S}\right)$
SIETE (7) PILOTES *HEXAGONAL*	$7\left(\frac{P_u}{7} + \frac{M'_{ux}}{2\,S} + \frac{M'_{uy}}{2\sqrt{3}\,S}\right)$
OCHO (8) PILOTES *RECTANGULAR*	$8\left(\frac{P_u}{8} + \frac{M'_{ux}}{4\,S} + \frac{M'_{uy}}{3\sqrt{3}\,S}\right)$
NUEVE (9) PILOTES *CUADRADO*	$9\left(\frac{P_u}{9} + \frac{M'_{ux}}{6\,S} + \frac{M'_{uy}}{6\,S}\right)$
DIEZ (10) PILOTES *HEXAGONAL (No regular)*	$10\left(\frac{P_u}{10} + \frac{M'_{ux}}{3\,S} + \frac{M'_{uy}}{3\sqrt{3}\,S}\right)$
ONCE (11) PILOTES *HEXAGONAL (No regular)*	$11\left(\frac{P_u}{11} + \frac{M'_{ux}}{4\,S} + \frac{M'_{uy}}{6\,S}\right)$
DOCE (12) PILOTES *RECTANGULAR*	$12\left(\frac{P_u}{12} + \frac{M'_{ux}}{8\,S} + \frac{M'_{uy}}{9\,S}\right)$

8.9 NORMAS Y CRITERIOS PARA EL DISEÑO DE CABEZALES

1 - RECUBRIMIENTO MINIMO

El recubrimiento mínimo entre el refuerzo y la superficie contacto con el suelo es 7,0 cm. *(A.7.7.1.)*

2.- SECCION EQUIVALENTE

Cuando se tienen columnas de concreto de formas distintas a la cuadrada o rectangular se asume una sección equivalente en áreas, para los efectos de localización de las secciones críticas para el cálculo del momento flector, del corte originado por la flexión, adherencia y longitud de desarrollo del refuerzo del cabezal. *(A.15.3.)*

3.- AREA DE ACERO MINIMO

No se normaliza porcentaje de acero mínimo por flexión, sin embargo el mínimo acero a colocar será por retracción y cambios de temperatura, normalizándose el porcentaje de acero "p" como el área de acero al área de la sección total de concreto, o sea p = As/bh. *(A.7.12.2.)*

$p \geq 0{,}0020$ Para cabilla corrugada de $fy \leq 3.500$ K/cm²

$p \geq 0{,}0018$ Para cabillas corrugadas o malla electrosoldada de alambre (corrugado o liso) de $fy = 4.200$ K/cm²

$$p \geq \frac{0{,}0018 \times 4.200}{fy} \quad \text{Para refuerzo de } fy > 4.200 \frac{Km}{cm^2} \text{ y } \varepsilon y = 0{,}0035$$

$p \geq 0{,}0014$ en todos los casos

4.- SEPARACION ENTRE CABILLAS

La separación "S" será la menor de las siguientes normas: *(A.7.6.1.)*

$S \leq \varnothing$ $\varnothing$ = diámetro nominal de la cabilla *(A.7.6.1.)*

$S \leq 2{,}5$ cm.

5.- ALTURA MINIMA DE CABEZALES

La altura útil "d" no será menor de 30 cm. *(A.15.7.)* , sin embargo esta pequeña altura generalmente conlleva a problemas de exceso de áreas de acero, razón por la cual se ha generalizado en una altura total "h" de cabezal mínima de 50 cm. *(No normalizado, opinión del Autor)*

6.- MOMENTOS FLECTORES

Se determinará el momento flector para el diseño de la sección de la viga-cabezal:

- En la cara de la columna, pedestal o muro, cuando éstos son de concreto, ver Fig. 8.22. *(A.15.4.2.a.)*

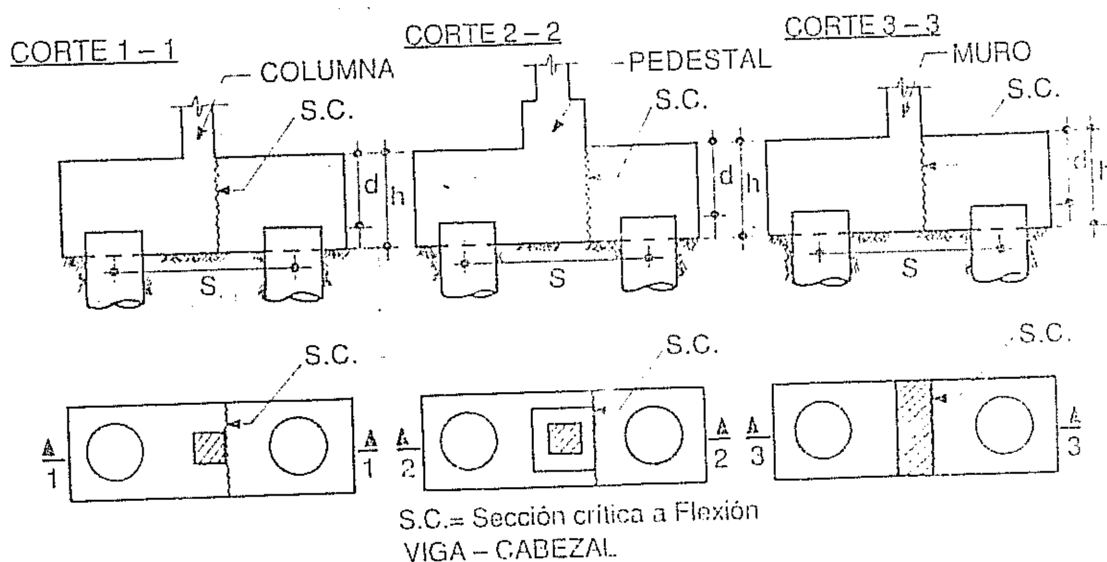


Figura 8.22

- En la cara de la columna equivalente, cuando la columna o pedestal no es rectangular y son de concreto.

(No normalizado, opinión del Autor)

- A la mitad, entre el eje central y el borde de la columna o el muro, cuando estos elementos son de mampostería,ver la Fig. 8 .23.

(A.15.4.2.b.)

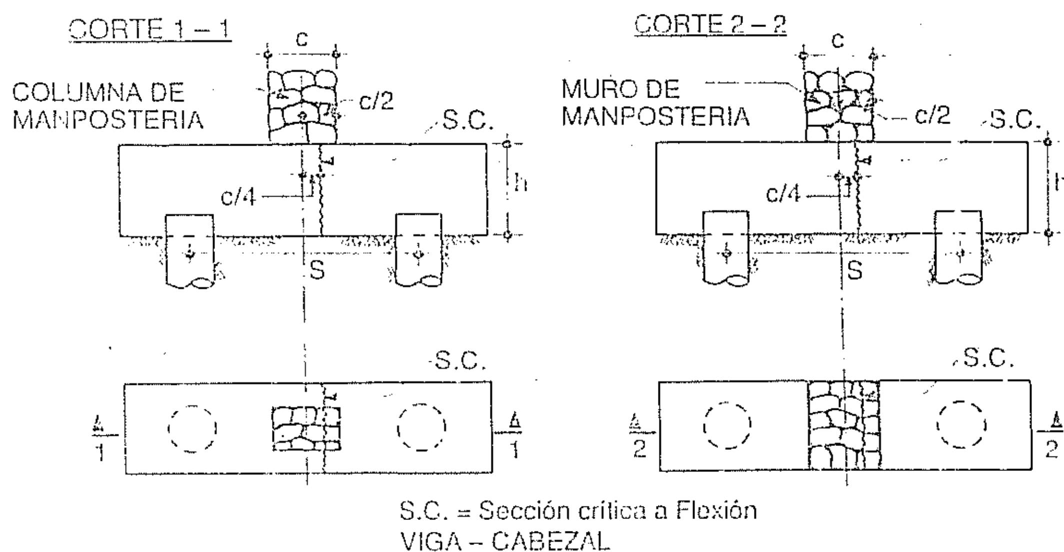


Figura 8.23

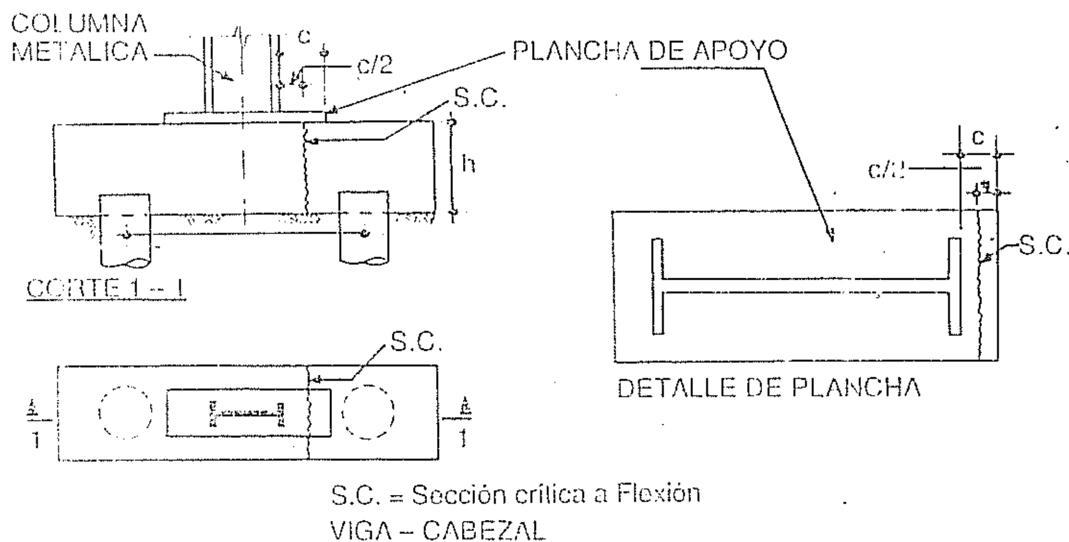


Figura 8.24

- A la mitad, entre el borde de la columna metálica y el de la plancha base de acero, para vigas-cabezales que soportan columnas metálicas sin pedestal, ver la Fig. 8.24. *(A.15.4.2.c.)*

7.- ESFUERZOS CORTANTES VIGA-CABEZAL

Se determinará el cortante originado por la flexión, para el diseño de la sección de la viga-cabezal a una distancia "d" (altura útil de la viga-cabezal), ver la Fig. 8.25. *(A.11.10.1.1.)*

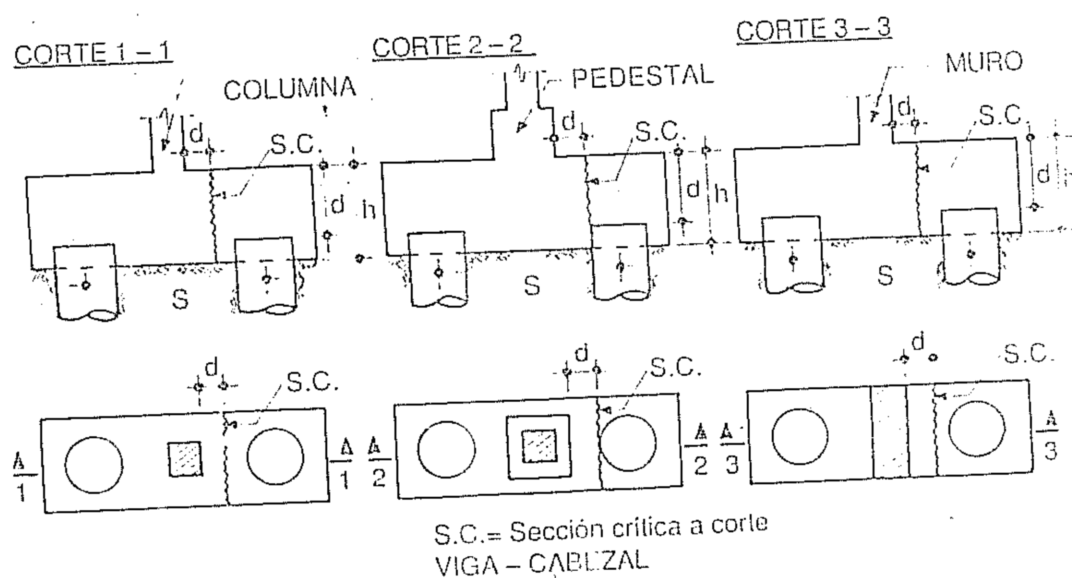


Figura 8.25

- De la cara de la columna, pedestal o muro, cuando éstos son de concreto. *(A.15.5.2.)*

- De la cara de la columna equivalente, cuando la columna o pedestal no son rectangulares y son de concreto. *(No normalizado, opinión del Autor)*

- De la mitad entre el eje central y el borde de la columna o muro, cuando éstos son de mampostería, ver la Fig. 8.26. *(No normalizado, opinión del Autor)*

- De la mitad entre el borde de la columna metálica y el borde de la plancha base de acero, para vigas-cabezales que soportan columnas metálicas sin pedestal, ver la Fig. 8.27 *(A.15.5.2.) y (A.15.4.2.c.)*

El esfuerzo cortante absorbido por el concreto no será mayor de $v_{cu} \leq 0,53\sqrt{f'c}$ *(A.11.3.1.1.)*

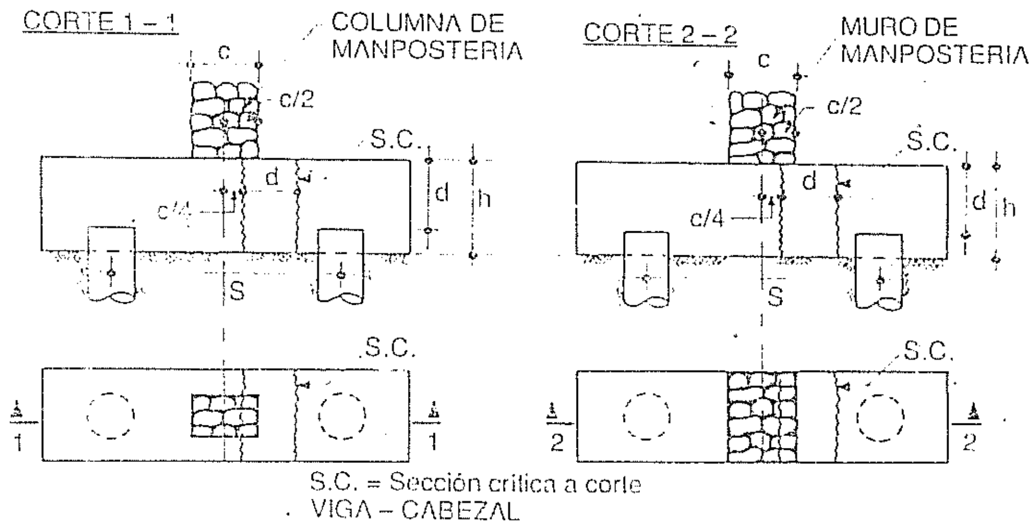


Figura 8.26

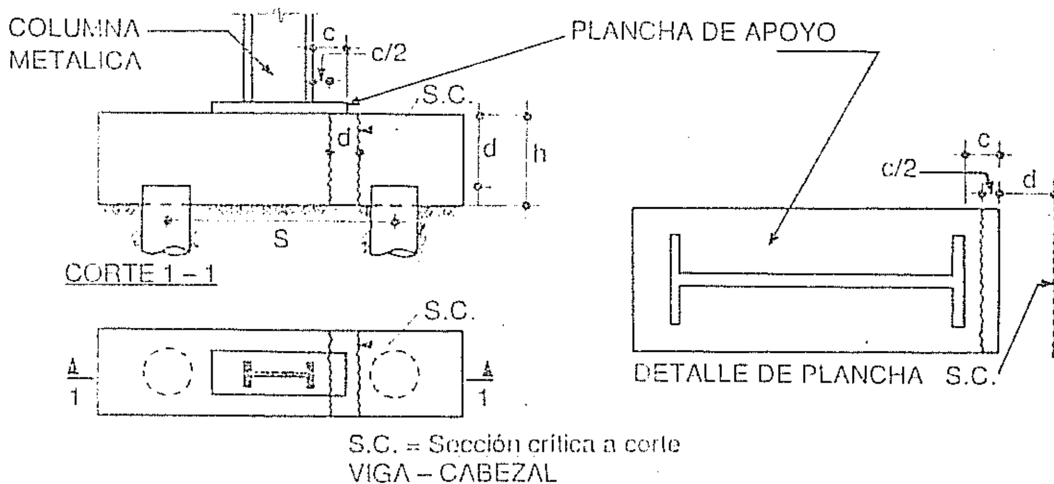


Figura 8.27

ESFUERZOS CORTANTES CABEZAL RIGIDO

La fuerza cortante en la sección a una distancia "d" de donde se considera la flexión en un cabezal con pilotes se determina de acuerdo a lo siguiente.

El valor de:

- La reacción total del pilote, cuyo centro está ubicado a una distancia

mayor o igual a $Ø_p/2$ respecto al centro de la sección de la columna, se considera que produce corte en esa sección, ver Fig. 8.28.
(A.15.5.3.a.)

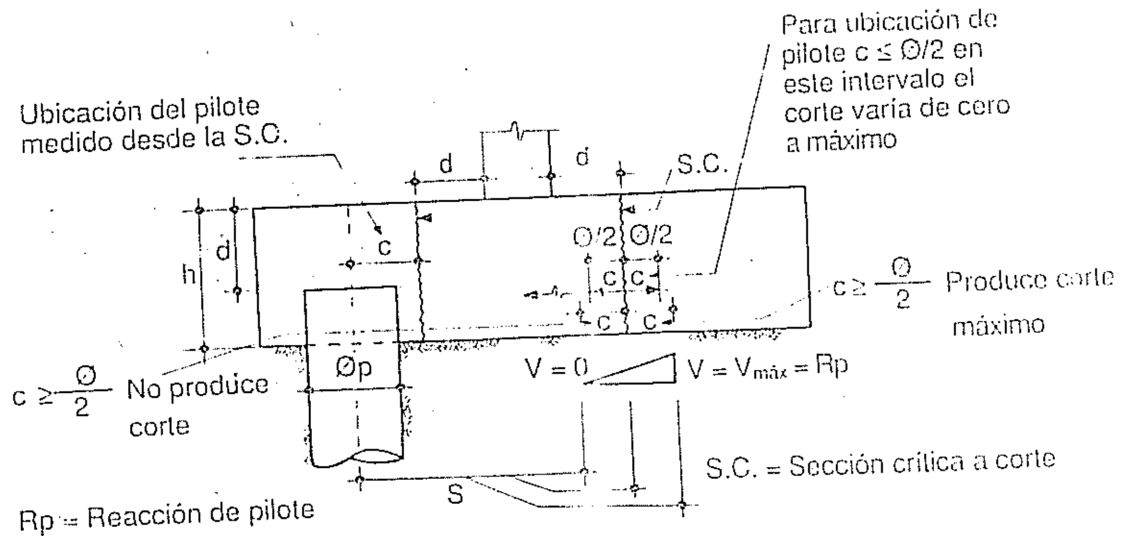


Figura 8.28

- La reacción total del pilote, cuyo centro está ubicado a una distancia menor a $Ø_p/2$ respecto al centro de la sección de la columna, se considera que no produce corte en esa sección, ver Fig. 8.28.
(A.15.5.3.b.)

- Para posiciones intermedias del centro del pilote, la parte de la reacción del pilote que se considera que produce corte en la sección se obtendrá por interpolación lineal entre el valor obtenido a $Ø_p/2$ dentro de la sección, ver Fig. 8.28.
(A.15.5.3.c.)

9.- PUNZONAMIENTO

Este es el esfuerzo cortante que se produce no por la flexión sino por el efecto cortante alrededor de las columnas o pilotes se determinará este en el área crítica "b" a una distancia d/2 alrededor de la columna, pedestal o columna equivalente o pilote, ver Fig. 7.29.en la página siguiente.
(A.11.10.1.2.)

Este esfuerzo cortante por punzonamiento no será mayor que:

$$V_{cu} = Ø\left(0{,}53 + \frac{1{,}06}{ß_c}\right)\sqrt{f'c} \leq Ø\ 1{,}06\sqrt{f'c}$$

Donde , $ß_c = \dfrac{C_2}{C_1} \geq 1$ y C_2 = Lado mayor de la columna

C_1 = Lado menor de la columna *(A.11.10.2.)*

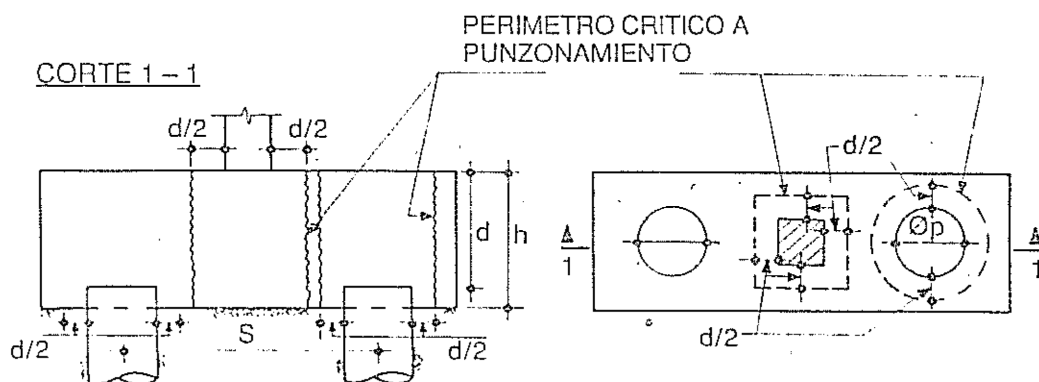


Figura 8.29

9.- ADHERENCIA Y LONGITUD DE DESARROLLO

No se permite solape en cabillas de diámetros Ø ≥ 1 3/8" (#11)

(A.12.14.2.1.)

El cálculo de la adherencia y longitud de desarrollo se hará en las secciones definidas para momento flector y en los planos donde ocurra cambio de sección (ver Figs. 8.22, 8.23 y 8.24). *(A.15.6.3.)* y *(A.15.4.2.)*

10.1.- LONGITUD DE DESARROLLO A TENSION

La longitud básica de desarrollo en centímetros será:

9.1.- LONGITUD DE DESARROLLO A TENSION

- La longitud básica de desarrollo en centímetros será:
- Para cabillas de diámetro Ø ≤ 1 3/8" .... $\dfrac{0{,}006\ A_s\ f_y}{\sqrt{f'c}}$
- -Pero no será menor de .... $0{,}006\ Ø\ f_y$
- Para cabillas de Ø1 3/4"......................... $\dfrac{0{,}82\ f_y}{\sqrt{f'c}}$
- Para cabillas de Ø2 1/4" .... $\dfrac{1{,}1\ f_y}{\sqrt{f'c}}$
- Para alambre corrugado. .... $\dfrac{0{,}11\ Ø\ f_y}{\sqrt{f'c}}$

Donde, Ø = Diámetro de la cabilla en cm. y,
A_s = Area de la cabilla en cm.

- La longitud básica a tensión se multiplicará por los siguientes factores según sean aplicables:
  - Para armaduras superiores.* 1,4
  - Para armaduras con $f_y \geq 4.200$ Kg/cm² . . . . $\left(2 - \frac{4.200}{f_y}\right)$
  - Para concretos con agregados livianos. Cuando se especifica f_{ct} y el concreto se dosifica de acuerdo con la sección A.4.2 de las normas . . . . $\frac{1{,}8\sqrt{f'c}}{f_{ct}} \geq 1$

    Cuando no se especifique f_{ct}.
    - Concreto "totalmente liviano,". 1,33
    - Concreto "liviano con arena,". 1,18
    - Cuando se utiliza reemplazo parcial de arena, puede interpolarse linealmente.

(A.12.2.3.)

NOTA: * A los efectos de longitud de desarrollo, se define como armadura superior a la armadura horizontal que tiene por debajo 30 cm. o más, de concreto.

- La longitud básica de desarrollo a tensión afectada por los valores anteriores, puede multiplicarse por los siguientes factores de reducción según sean aplicables.
  - Para las armaduras con separación de centro a centro igual o mayor de 15 cm. ubicadas a 8 cm. o más desde la cara del miembro al borde de la barra, medidos en la dirección de la separación 0,8
  - Para las armaduras en exceso de las que se requiere por análisis de miembro sometido a flexión. . . . . $\frac{As_{requerido}}{As_{proporcionado}}$
  - Para las armaduras encerradas por zunchos de diámetros $\varnothing \geq 1/4$" y con un paso no mayor de 10 cm. 0,75

(A.12.2.4.)

- La longitud de desarrollo L_d no será menor de 30 cm. *(A.12.2.5.)*

9.2.- LONGITUD DE DESARROLLO A COMPRESION

La longitud básica de desarrollo a compresión en centímetros será .... $\frac{0{,}008\ \varnothing\ fy}{\sqrt{f'c}}$

Pero no menor que .... $0{,}004\ \varnothing\ fy$

La longitud básica de desarrollo a compresión puede multiplicarse por los siguientes factores según sean aplicables.

- Para las armaduras en exceso de las que por el factor m, se requieran por análisis .... $\frac{As_{requerido}}{As_{proporcionado}}$

$Ld \geq 20$ cm. *(A.12.3.1.)*

9.3.- LONGITUD DE DESARROLLO PARA GRUPOS DE CABILLAS

La longitud de desarrollo de las cabillas individuales de un grupo, sometidas a tracción o a compresión, será la de la cabilla individual para grupos de dos (2) barras y será incrementada en un 20% para grupos de tres barras. *(A.12.4.)*

10.-APLASTAMIENTO

Los esfuerzos de aplastamiento entre el contacto de la columna de concreto y el cabezal o la plancha base metálica y el cabezal, no será mayor de Ø 0,85 f'c.

(A.10.15.1.) y *(A.15.8.3.)*

Cuando la superficie de apoyo sea mas ancha que el área cargada en todos los lados, la resistencia de diseño al aplastamiento del apoyo sobre el área cargada, se puede multiplicar por el factor $F = \sqrt{A_2/A_1} \leq 2$ donde $A_2 > A_1$ (Ver Fig. 8.30.) *(A.10.15.1.1.)*

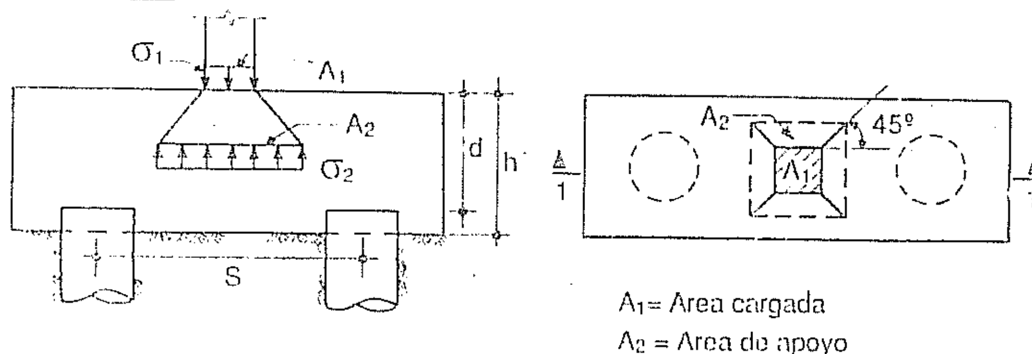


Figura 8.30

Por lo tanto:

$$\sigma_1 = F\, Ø\, 0{,}85\ f'_c = \sqrt{\frac{A2}{A1}}\ Ø\, 0{,}85\, f'_c \geq 1{,}2\ f'_c$$

Donde, $Ø = 0{,}70$

$$\sigma_2 = Ø\, 0{,}85\ f'_c \geq 0{,}6\, f'_c$$

Cuando los esfuerzos al aplastamiento exceden a $0{,}85\, f'_c\sqrt{A2/A1}$ se proporcionará refuerzo entre el cabezal y la columna y el refuerzo proporcionará el excedente de la fuerza de aplastamiento.

El reglamento no requiere que todas las cabillas de una columna se prolonguen y se anclen con ganchos en el cabezal, aunque si deben pasar al cabezal y prolongarse dentro con una longitud de desarrollo a compresión apropiada según las normas, en una cantidad de acero por lo menos igual a $As \geq 0{,}005\, Ag$ y un mínimo de 4 cabillas o espigas. *(A.15.8.4.)*

11.-CABILLAS DE ARRANQUE O ESPIGAS

Las espigas no pueden tener un diámetro mayor de Ø 1 3/8" (#11). *(A.15.8.6.)*

No se permite solape entre espigas mayor de Ø 1 3/8". *(A.12.14.2.1.)*

Para cabillas de Ø1 3/4" ó Ø2 1/4" que vengan de la columna y que trabajen a compresión, se permite solapar con las espigas que provengan del cabezal para proporcionar el área de acero requerida (ésta área no será mayor de 0,005 Ag).

Las espigas deben introducirse en la columna a una distancia no menor que la longitud de desarrollo de las barras Ø1 3/4" ó Ø2 1/4", o la longitud de empalme de las espigas, en todo caso la que sea mayor. *(A.15.8.6.)*

El diámetro de las espigas si se utilizan, no excederá al de las barras longitudinales de la columna en mas de 5 mm. *(A.15.8.4.2.)*

Los arranques o espigas se deben introducir en la zapata a una distancia tal que debe cumplir con la longitud de desarrollo en compresión y no se contará como longitud de desarrollo la longitud de los ganchos, además deben cumplir con:

(A.12.3.1.)

$$L_d \geq 20\ \text{cm.}$$

$$L_d = \frac{0{,}08\, f_y\, Ø}{\sqrt{f'_c}} \geq 0{,}004\, Ø\, f_y$$

Donde, Ø = Diámetro

(A.12.3.2.)

12.-DISTRIBUCION DEL REFUERZO

El acero del refuerzo en los cabezales se colocará cubriendo el ancho total del pilote.

Cuando la altura total "h" del cabezal sea superior a 60 cm. deberá disponerse de armaduras laterales o de parámetro. *(A.15.5.4.)*

En este caso se recomienda colocar el equivalente al diez por ciento del área de acero principal. *(A.10.6.6.)*

El porcentaje de acero mínimo es por retracción y cambios de temperatura, y de acuerdo a la siguiente expresión:
$\rho_{mín} = 0{,}0018\, bh$

13.-El pilote una vez descabezado debe penetrar en el cabezal desde el borde superior del pilote a la cara inferior del cabezal mínimo 10 cm., ver Fig. 8.31. *(No normalizado, opinión del Autor)*

14.-El cabezal debe sobresalir del borde exterior del pilote una distancia como mínimo 10 cm., ver Fig. 8.31. *(No normalizado, opinión del Autor)*

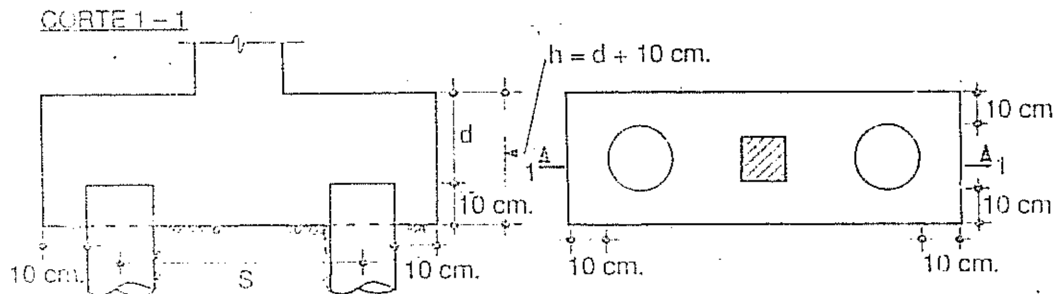


Figura 8.31

8.10 EJEMPLO DE DISEÑO DE CABEZALES

8.10.1 EJERCICIO Nº 1

Diseñar el cabezal requerido para soportar las solicitaciones y materiales siguentes:

DATOS

Columna de 50 x 50 cm.

P_D = 190 T.	P_L = 45 T.
Concreto f'c = 210 K/cm²	Acero fy = 4.200 K/cm²
$\varnothing_p$ = 50 cm.	S = 1,00 m.

DETERMINACION DE ALTURA COMO CABEZAL RIGIDO

$d \geq 0{,}84\ S \Rightarrow d \geq 0{,}84 \times 1{,}00 = 84$ cm.

Luego, la altura "h" del cabezal será: $h \geq 94$ cm.

Se toma $h = 95$ cm. $\Rightarrow d = 85$ cm.

DETERMINACION DE LA FORMA DEL CABEZAL

$P_u = 1{,}4\ P_D + 1{,}7\ P_L = 1{,}4 \times 190 + 1{,}7 \times 45 = 342{,}5$ T.

De la tabla de la Tabla 8.II se obtiene el número de pilotes igual a cuatro (4)

REACCION MAXIMA DEL PILOTE

$$P_{up} = \frac{P_u}{4} = \frac{342{,}50}{4} = 85{,}6 \text{ T.} < 112 \text{ T.}$$ (Según la tabla de la Tabla 8.II)

En este caso no es necesario verificar la resistencia al corte del cabezal según las normas. (Ver el pto. 8.4 de esta edición). *(A.15.5.4)*

DETERMINACION DE LA FUERZA T DE TRACCION

$$T = \frac{P_u S}{8d} = \frac{342.500 \times 1{,}00}{8 \times 0{,}85} = 50.367 \text{ Kg.}$$ (Según la Fig. 8.11)

50367

$$A_s = \frac{T}{\varnothing f_y} = \frac{342.500}{0{,}7 \times 4.200} = 17{,}13 \text{ cm}^2$$

AREA DE ACERO TOTAL EN LECHO INFERIOR

$A_{st} = 2 \times 17{,}13 \text{ cm}^2 = 34{,}26 \text{ cm}^2$

$A_{smín} = 0{,}0018\ bh = 0{,}0018 \times 160 \times 70 = 20{,}16 \text{ cm}^2 < A_{st}$

El área de acero de $17{,}13 \text{ cm}^2$ es repartida en el ancho del pilote, es decir, en 40 cm. de ancho, en el resto del cabezal se acostumbra a colocar el mismo acero.

$S = \frac{40}{17{,}13}\ 15{,}07 = 11{,}83$ cm. $\Rightarrow$ 13 Ø 1" c/s (en todo el ancho del cabezal)

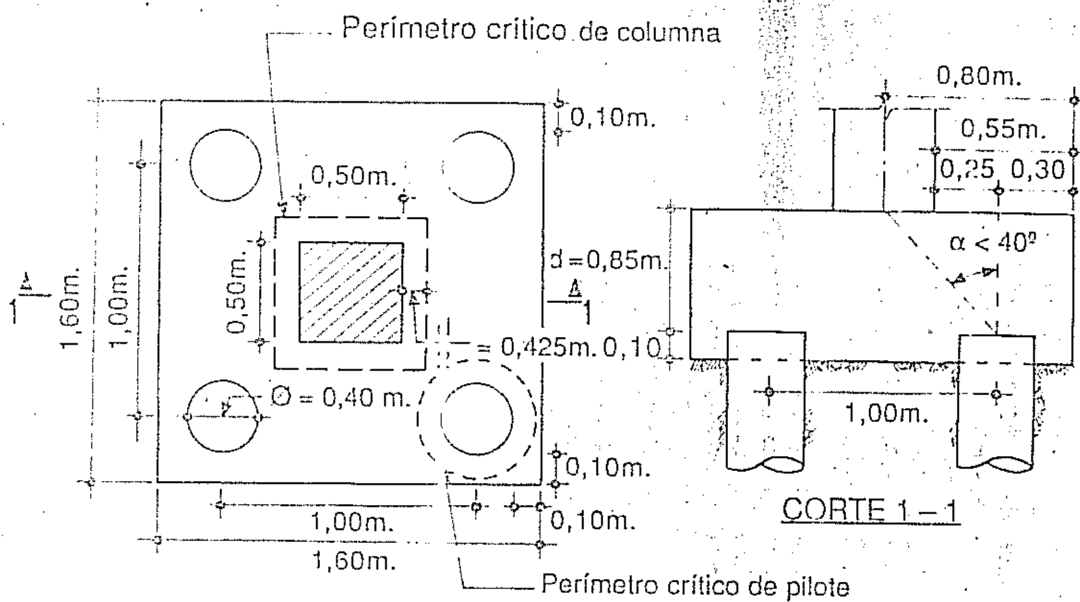


Figura 8.32

DISEÑO POR PUNZONAMIENTO ALREDEDOR DE LA COLUMNA. (Ver Fig 8.34.)

$$v_{cu} = \varnothing\left(0{,}53 + \frac{1{,}06}{\beta c}\right)\sqrt{f'c} < \varnothing\, 1{,}06\sqrt{f'c} \qquad \text{Donde } \beta c = 1$$

Luego,

$$v_{cu} = 0{,}85\left(0{,}53 + \frac{1{,}06}{1}\right)\sqrt{210} = 19{,}59 > 0{,}85 \times 1{,}06\sqrt{210} = 13{,}07 \text{ K/cm}^2$$

El esfuerzo cortante máximo permitido en el concreto $v_{cu} = 13{,}07$ K/cm²

ESFUERZO CORTANTE ACTUANTE

$$v_u = \frac{P_u}{4(c+d)d} = \frac{342.500}{4\,(50+85)85} = 7{,}46 \text{ K/cm}^2 < 13{,}07 \text{ K/cm}^2 \quad OK$$

DISEÑO POR PUNZONAMIENTO ALREDEDOR DEL PILOTE (Ver Fig. 8.32)

$v_{cu} = 13{,}07$ K/cm² NOTA: Se toma $\beta_c = 1$ por ser circular el pilote

ESFUERZO CORTANTE ACTUANTE

$$v_{cu} = \frac{P_{up}}{\pi(\varnothing_p + d)d} = \frac{85.600}{\pi(50+85)85} = 2{,}37 \text{ K/cm}^2 < 13{,}07 \text{ K/cm}^2 \quad OK$$

Como el cabezal es de altura mayor de 60 cm., se requiere acero lateral de paramento equivalente al 10% del área de acero principal.

$A_s = 0{,}1 \times 34{,}26 = 3{,}42\ cm^2$ => Acero por cara = $1{,}71\ cm^2$

Separación S = 1,71 x 0,71 = 39,44 cm. => Ø 3/8" c/15 cm. acero de paramento.

Para el armado del refuerzo en cabezales, tal como se demostró, sólo requiere acero en su lecho inferior y en este caso en las paredes laterales por ser mayor de 60 cm. de alto, sin embargo, la recomendación y la costumbre ha sido colocar los aceros en forma de "cesta" que envuelve todo el cabezal.

En este caso la armadura de la "cesta" en la cara superior, se puede colocar la mínima 13 Ø 1/2" c/s, ver diseño en la Fig. 8.33.

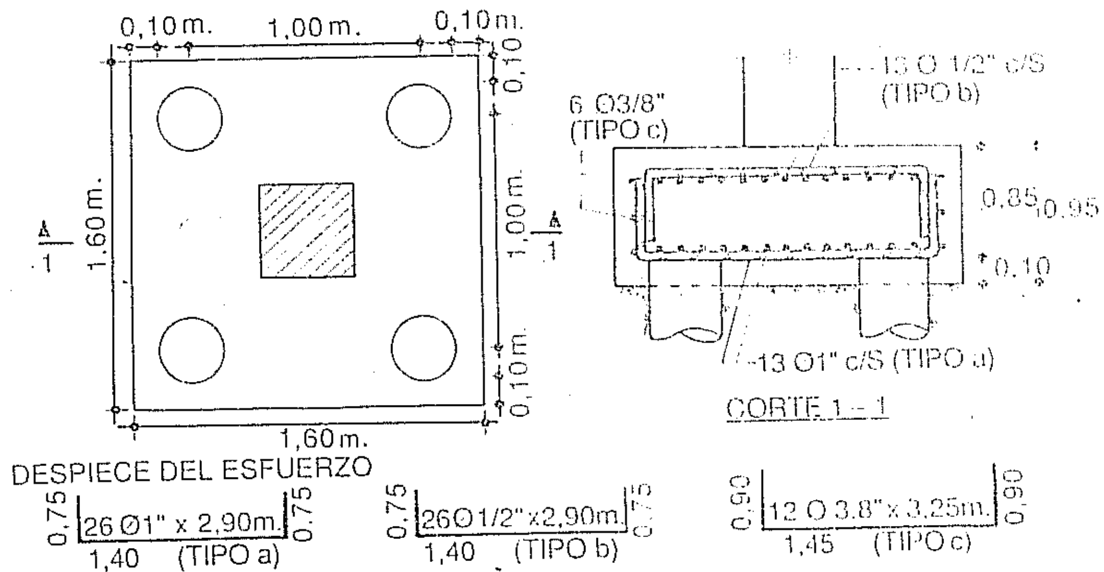


Figura 8.33

8.10.2 EJERCCIIO Nº 2

Para las cargas y materiales dados, diseñar el cabezal requerido, ya que por razones de geometría y espacio, sólo se puede colocar un cabezal de 45 cm. de altura total y de 4 pilotes, ver Fig. 8.34.

DATOS

Colmna de 50x50 cm.

P_D= 140 T.

Concreto $f_c' = 210$ K/cm²

$Ø_p = 42$ cm.

$P_L = 40$ T.

Acero $f_y = 4.200$ K/cm²

S = 1,00 m.

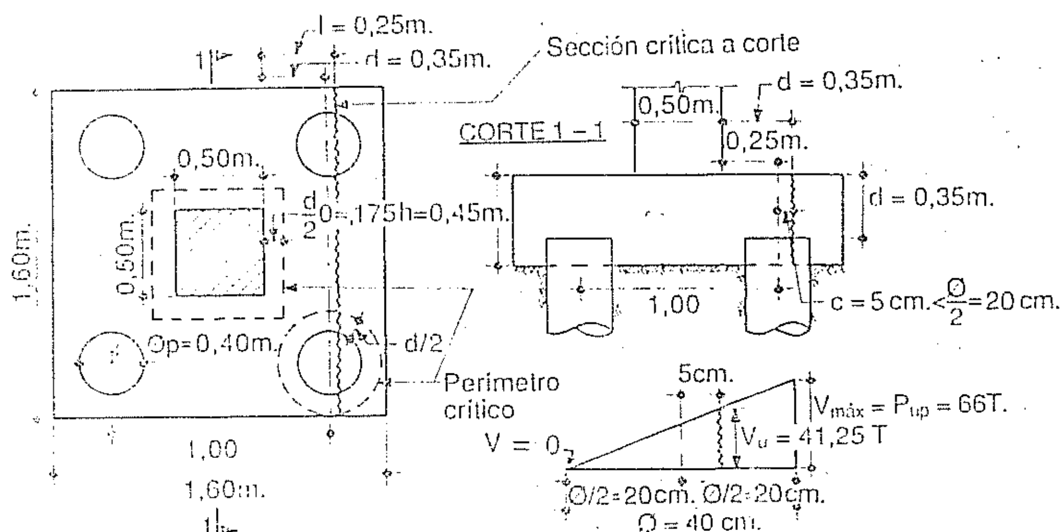


Figura 8.34

CHEQUEO DE LA RELACION ALTURA A SEPARACION DE PILOTES

d = 35 cm. < 0,84 S = 0,84 x 1,00 m = 0,84 cm.

En este caso se comporta como viga-cabezal, por lo tanto es necesario verificar el esfuerzo cortante y su comportamiento a flexión en la viga-cabezal.

DISEÑO POR CORTE

Según norma $v_{cu} = Ø\left(0{,}53\ \sqrt{f'c}\right) = 0{,}85 \times 0{,}53\ \sqrt{210} = 6{,}52\ \text{K/cm}^2$

$P_u = 1{,}4\ P_D + 1{,}7\ P_L = 1{,}4 \times 140 + 1{,}7 \times 40 = 264$ T.

Carga en el pilote

$P_{up} = \dfrac{264}{4} = 66$ T.

Chequeando corte en la sección crítica indicada según relación lineal, $V_u = 41{,}25$ T., ver Fig. 8.33.

$$v_{cu} = \frac{2\ V_u}{b_o\ d} = \frac{2 \times 41.250}{160 \times 35} = 14{,}73\ \text{K/cm}^2 > v_{cu} = 6{,}52\ \text{K/cm}^2$$

$$v_{su} = 14{,}73 - 6{,}52 = 8{,}21 < Ø\ 2{,}1\ \sqrt{f'c} = 0{,}85 \times 2{,}1\ \sqrt{210} = 25{,}87\ \text{K/cm}^2 \qquad \text{OK}$$

NOTA: Un procedimiento práctico y por el lado de la seguridad es considerar el corte producido totalmente por la reacción del pilote.

$$v_u = \frac{2\,P_{up}}{b_o\ d} = \frac{2 \times 66.000}{160 \times 35} = 23,53\ \text{K/cm}^2$$

Como se vé resulta mayor.

Se toman barras inclinadas a 45º y separadas "S"

$$S = \varnothing \frac{n\ A_v\ f_y}{v_{su}\ b} \left(\text{sen}\ \alpha + \cos\ \alpha \right)$$ *(A.11.4.6.5.)*

Donde,
- A_v = Area de la cabilla
- α = 45º
- $\varnothing$ = 0,85
- n = Número de cabillas
- S = 15 cm.
- b = 160 cm.

Luego; $$n = \frac{S\ v_{su}\ b}{\varnothing\ A_v\ f_y\ (\text{sen}\ \alpha + \cos\ \alpha)}$$

Tomando acero Ø 3/8", $A_{s3/8"} = 0,71\ \text{cm}^2$

$$n = \frac{15 \times 8,21 \times 160}{0,85 \times 0,71 \times 4.200 \times (\text{sen}\ 45º + \cos\ 45º)} = 5,49$$

Usar 6 Ø 3/8" c/15 cm. en cada dirección.

DISEÑO POR PUNZONAMIENTO ALREDEDOR DE LA COLUMNA. (Ver Fig 8.33.)

Según norma $v_{cu} = 13,07\ \text{K/cm}^2$ (Del problema anterior)
El esfuerzo cortante actuante de la columna.

$$v_u = \frac{P_u}{4\,(c + d)\ d} = \frac{264.000}{4\,(50 + 35)\ 35} = 22,18\ \text{K/cm}^2$$

Luego,
$v_{su} = 22,18 - 13,07 = 9,11\ \text{K/cm}^2 < \varnothing\ 2,1 \sqrt{f'c} = 0,85 \times 2,1 \sqrt{210} = 25,87\ \text{K/cm}^2$ *OK*

En este caso como el corte por punzonamiento es menor que el corte por flexión, se toma el diseño anterior de las barras inclinadas.

DISEÑO POR PUNZONAMIENTO ALREDEDOR DE LOS PILOTES. (Ver Fig. 8.34.)

Según norma $v_{cu} = 13{,}07$ K/cm² NOTA: Se toma $\beta_c = 1$ por ser circular

El esfuerzo cortante actuante alrededor del pilote.

$$v_u = \frac{P_{up}}{\pi(\varnothing p + d)\ d} = \frac{264.000 \times 0{,}23}{\pi\ (42 + 35)\ 35} = 7{,}79\ \text{K/cm}^2 < 13{,}07\ \text{K/cm}^2 \qquad OK$$

DISEÑO POR FLEXION (Ver Fig. 8.32)

En ambas direcciones el momento flector es igual por ser viga-cabezal simétrica.

$M_u = 2\ P_{up}\ l$ Donde, $l = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$ m. (Ver Fig. 8.34)

$M_u = 2 \times 66.000 \times 0{,}25 = 33.000$ Kg–m.

$M_{ru} = 35{,}13 \times 1{,}60 \times 35^2 = 68.855$ Kg–m. $> M_u$ *OK*

DETERMINACION DEL AREA DE ACERO

$A_s = 27{,}71$ cm² / 1,60 m. => Ø 3/4" c/15 cm. => 10 Ø 3/4" c/s

Como la viga-cabezal no es mayor de 60 cm. no se requiere acero lateral de paramento, sin embargo, se ha hecho costumbre colocar acero de paramento aunque no lo requiera, en este caso el mínimo:

$A_s = 0{,}1 \times 27{,}21 = 2{,}77$ cm² => Ø 3/8" c/30 cm. de acero de paramento.

En el diseño final se coloca armadura superior de 11 Ø 1/2" c/s, ver diseño en la Fig. 8.35.

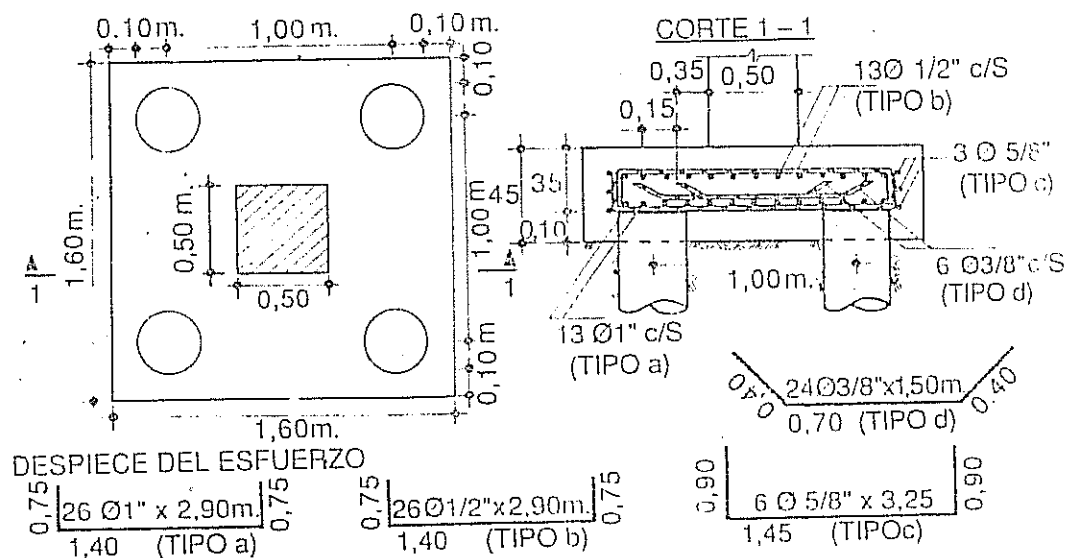


Figura 8.35

8.10.3 EJERCICIO Nº 3

Diseñar el cabezal mostrado para las siguientes cargas y materiales indicados, ver Fig. 8.36.

DATOS

Columna de 60 x 60 cm. con 16 Ø 1"

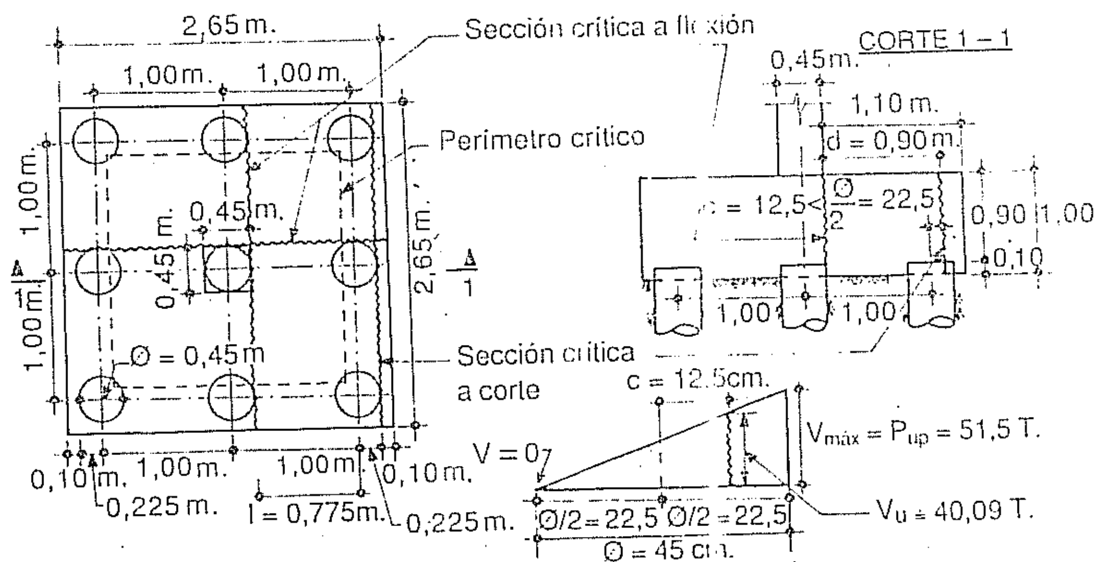


Figura 8.36

$P_D = 280$ T. $\quad P_L = 170$ T.
Concreto $f'c = 210$ K/cm² $\quad$ Acero $fy = 4.200$ K/cm²
$\varnothing_p = 42$ cm. $\quad S = 1{,}00$ m.

DETERMINACION DE ALTURA h DEL CABEZAL

$$P_u = 1{,}4\ P_D + 1{,}7\ P_L = 1{,}4 \times 2{,}80 + 1{,}7 \times 170 = 681 \text{ T.}$$

$$P_{up} = \frac{681}{9} = 75{,}66 \text{ T.}$$

En este caso se tiene que: $\quad d = 90 \text{ cm.} < 1{,}69\ S = 1{,}69 \times 100 = 169 \text{ cm.}$

Hay que estudiar el corte proveniente de la flexión, ya que se comporta como viga-cabezal.

DISEÑO POR CORTE (Ver Fig. 8.36).

Por norma $\quad v_{cu} = 0{,}85 \times 0{,}53\ \sqrt{210} = 6{,}52$ K/cm²

CORTE ACTUANTE

En este caso la sección crítica se monta sobre los pilotes, luego hay efecto del corte, ya que la distancia $c = 12{,}5$ cm. $< \varnothing p/2 = 22{,}5$ cm. y el corte por pilote es $V_u = 40{,}09$ T., ver Fig. 8.37.

$$v_u = \frac{3 \times V_u}{b_o\ d} = \frac{3 \times 40.009}{265 \times 90} = 5{,}03 \text{ K/cm}^2 < 6{,}52 \text{ K/cm}^2 \qquad OK$$

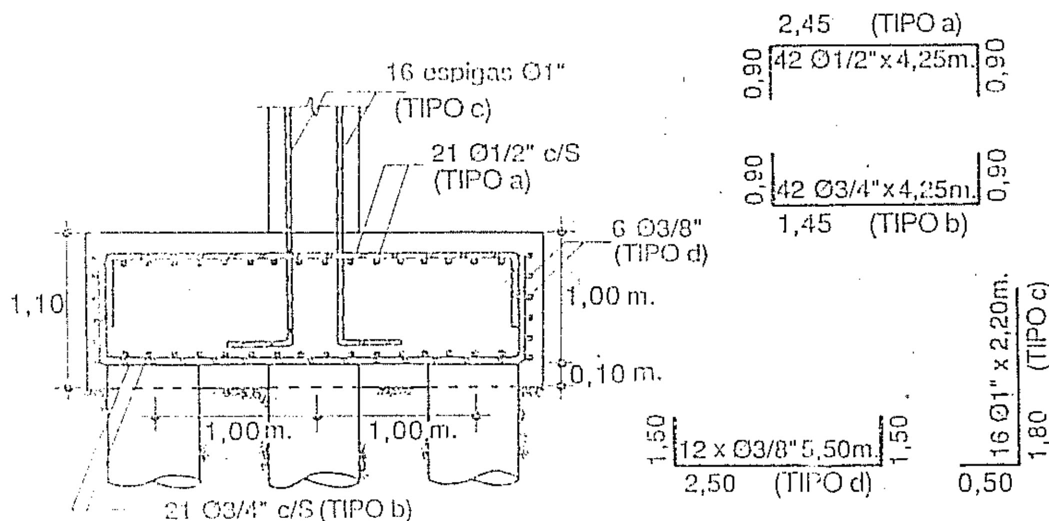


Figura 8.37

DISEÑO POR PUNZONAMIENTO ALREDEDOR DE LA COLUMNA

Según normas $v_{cu} = 13{,}07$ K/cm² (De problemas anteriores)

$$v_u = \frac{8P_{up}}{4(c+d)} = \frac{8 \times 76.660}{4\,(60+90)90} = 11{,}20 \text{ K/cm}^2 < 13{,}07 \text{ K/cm}^2 \qquad OK$$

PUNZONAMIENTO ALREDEDOR DEL PILOTE (Ver Fig. 8.36)

$$v_u = \frac{P_{up}}{\pi(\varnothing_p + d)\ d} = \frac{76.500}{\pi(42+90)\ 90} = 2{,}02 \text{ K/cm}^2 < 13{,}07 \text{ K/cm}^2 \qquad OK$$

DISEÑO POR FLEXION (Ver Fig. 8.36)

$M_u = 3\ P_{up}\ l$ Donde, $l = 1{,}00 - 0{,}45/2 = 0{,}775$ m

$M_u = 3 \times 75.660 \times 0{,}775 = 175.910$ Kg–m

$M_{RU} = 35{,}13 \times 2{,}65 \times 90^2 = 754.065$ Kg–m $> M_u$ $\qquad OK$

DETERMINACION DEL AREA DE ACERO

$$A_s = \frac{175.910}{0{,}9 \times 4.200 \times 0{,}9 \times 0{,}9} = 57{,}45 \text{ cm}^2 / 2{,}65 \text{ m.} => 21{,}68 \text{ cm}^2/\text{m.}$$

Usar Ø 3/4" c/13cm. => 21 Ø 3/4" c/s

ACERO DE PARAMENTO

$A_s = 0{,}1 \times 57{,}45 = 5{,}74$ cm² => Acero por cara = 2,87 cm².

$S = \frac{1{,}00}{2{,}87} \times 0{,}71 = 24{,}74$ => Usar Ø 3/8" c/15 cm.

CHEQUEO DEL APLASTAMIENTO EN LA COLUMNA

$P_{máx} = 0{,}7(0{,}85\ f'c\ A_g) = 0{,}7(0{,}85 \times 210 \times 60 \times 60) = 449.820$ Kg. $< P_u = 464.00$ Kg.

Como $P_u > P_{máx}$, hay exceso de carga, cuya diferencia debería ser transferido al cabezal a través de aceros longitudinales al eje de la columna.

AREA DE ACERO REQUERIDA PARA LA TRANSMISION DE ESFUERZOS POR APLASTAMIENTO.

$$A_s = \frac{P_u - P_{máx}}{\varnothing\ f_y} = \frac{464.000 - 449.820}{0,70 \times 4.200} = 4,28\ cm^2 < 16\ \varnothing 1"$$

Nota: 16 Ø1" es el acero de la columna.

CHEQUEO DEL AREA DE ACERO MINIMA SEGUN NORMAS

$A_{smín} = 0,005 \times 60 \times 60 = 18,00\ cm^2 < 16\ \varnothing\ 1"$ (Acero de la columa), pero no menor a 4 cabillas.

Entonces, usar 16 Ø1" de espigas entre cabezal y columna.

LONGITUD DE DESARROLLO DE LAS ESPIGAS

Las espigas Ø1" deben extenderse dentro de la columna una longitud no menor que la longitud de desarrollo de las cabillas de la columna, que en este caso también son de Ø1", luego:

$$L_d = \frac{0,08\ \varnothing\ f_y}{\sqrt{f'c}}$$

$$L_d = \frac{0,08 \times 2,54 \times 4.200}{\sqrt{210}} = 58,891\ cm. > 0,004\ \varnothing\ f_y = 0,004 \times 2,54 \times 4.200 = 42,67\ cm.$$

$L_d = 58,89$ cm. => 60 cm.

Las espigas deben introducirse en la columna a una longitud no menor de 60 cm.

LONGITUD DE DESARROLLO DE LAS ESPIGAS EN EL CABEZAL

$L_d = 60$ cm. (Según cálculo anterior)

En este caso, como el cabezal tiene altura total 1,00 m. y la altura útil es de 0,90 m., las espigas desarrollan más de lo exigido. *OK*

Utilizar espigas 16 Ø1" con una longitud vertical de 1,70 m. y un gancho a escuadra de 50 cm., es decir, 16 Ø1" x 2,20 m., ver diseño en la Fig. 8.37.

En el diseño final se colocan 21 cabillas de Ø"2 superior y en cada sentido.

8.10.4 EJERCICIO Nº 4

Diseñar el cabezal del problema anterior para que se comporte como u cabezal del tipo rígido, ver problema anterior para cargas y materiales.

En este caso se debe cumplir que: $d \geq 1{,}69\ S = 1{,}69 \times 1{,}00 = 1{,}69$ m.

Se toma h = 1,80 m. => d = 1,70 m.

No hay punzonamiento ya que en el problema anterior tampoco lo hubo tampoco hay corte por ser cabezal rígido.

DISEÑO POR FLEXION (Ver Fig. 8.37)

$$T = \frac{PS}{3d} = \frac{464.000 \times 1{,}00}{3 \times 1{,}70} = 90.980 \text{ Kg.}$$

$$As = \frac{T}{\varnothing\ fy} = \frac{90.980}{0{,}7 \times 4.200} = 30{,}95 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{Usar } 16\ \varnothing\ 3/4'' \text{ c/s}$$

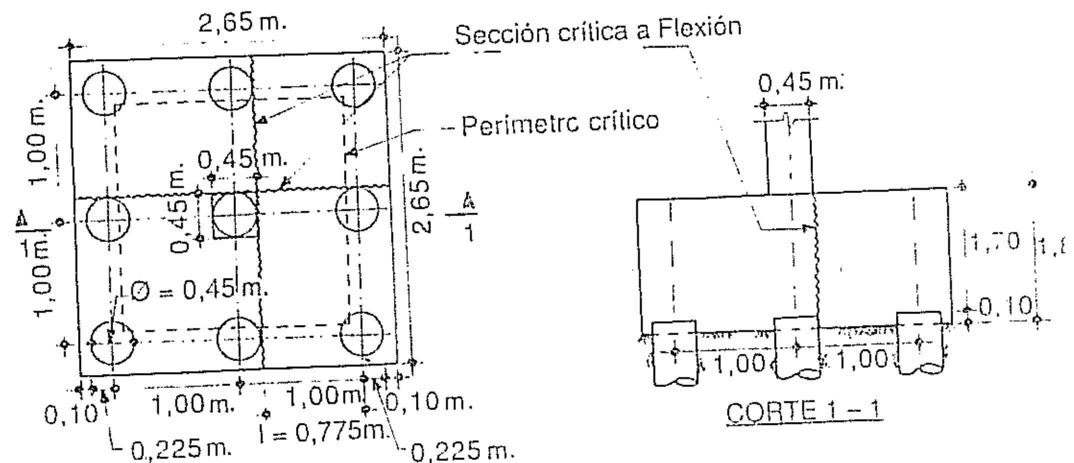


Figura 8.38

El resto del problema es igual al caso anterior.

Compárese el ahorro básicamente en el acero del cabezal, ver Fig. 8.39.

16 espigas Ø1" (TIPO c)
16 Ø1/2" c/S (TIPO a)
6 Ø 3/8" (TIPO d)
1,80
1,70 m.
0,10 m.
1,00 m.   1,00 m.
16 Ø 3/4" c/S (TIPO b)
2,45 (TIPO a) 0,90 32 Ø1/2" x 4,25m. 0,90
1,60 32 Ø 3/4 x 5.65m 1,60 2,45 (TIPO b)
1,50 12Ø3.8" x 5,50m. 1,50 2,50 (TIPO d)
16 Ø1" x 2,90m. (TIPO c) 2,40 0,50

Figura 8.39

8.10.5 EJERCCIO Nº 5

Escoger el tipo de cabezal requerido, cuando se supone que actúa una carga axial pura, proveniente de la columna, según los datos dados.

DATOS

$P_u = 695$ T. $\qquad Ø_p = 60$ cm.

CAPACIDAD DE CARGA ULTIMA DEL PILOTE

$P_{up} = 45\, Ø_p^2 = 45 \times 60^2 = 162.000$ Kg.

DETERMINACION DEL NUMERO n DE PILOTES

$$n = \frac{1,10\ P_u}{P_{up}} - \frac{1,10 \times 695}{162} = 4,71 \Rightarrow n = 5 \text{ Pilotes}$$

Se toma cabezal de cinco (5) pilotes y del tipo cuadrado.

Como no se dá mas información respecto al suelo, se asume separación en-tre pilotes $S = 2,5\ Ø_p$ (Según tabla de separaciones mínimas).

Para el diseño definitivo de la forma, ver Fig. 8.40.

El diseño de la sección de concreto altura "h" total se ejecuta de acuerdo a los problemas anteriores resueltos.

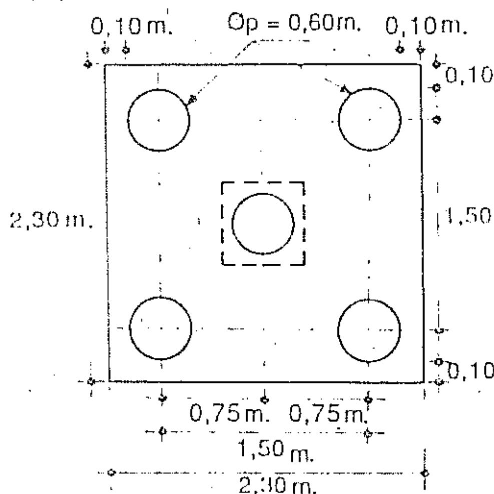


Figura 8.40

8.10.6 EJERCICIO Nº 6

Escojer el tipo de cabezal requerido, cuando actúa un sistema de carga axial, corte y momento según datos dados.

DATOS

$P_{ux} = 390$ T. $\quad$ $P_{uy} = 170$ T.

$V_{ux} = 10$ T. $\quad$ $V_{uy} = 3$ T.

$M_{ux} = 45$ T–m. $\quad$ $M_{uy} = 9$ T–m.

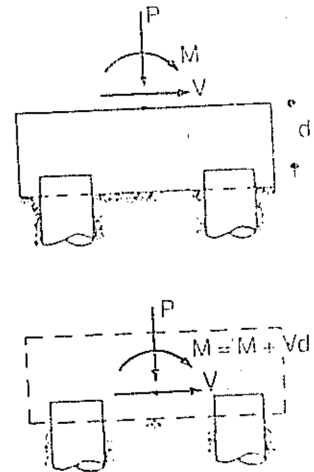


Figura 8.41

En este caso se requieren los momentos definitivos sobre la cara superior de los pilotes, estos momento lo componen los actuantes dados más el mo-mento que producen las cargas de corte por la altura útil "d" del cabezal, ver Fig. 8.41.

La carga total Pu será la suma de las actuantes.

$P_u = P_{ux} + P_{uy} = 390 + 170 = 560$ T.

DETERMINACION DEL NUMERO n DE PILOTES

Se toma pilote de $Ø_p = 50$ cm.

$$n = \frac{1{,}10\ P_u}{P_{up}} = \frac{1{,}10 \times 560.000}{46 \times 50^2} = 5{,}47 \Rightarrow n = 6 \text{ pilotes}$$

Se toma un cabezal de 6 pilotes del tipo hexagonal de lado L

$L = Øp + S + 0{,}20 = 1{,}25 + 0{,}50 + 0{,}20 = 1{,}95$ m. => L = 2,00 m. (Ver Fig. 8.2)

Para este caso, diseñando como cabezal rígido se requiere que $d \geq 1{,}20\ S$

Tomando $S = 2{,}5\ Ø = 2{,}5 \times 50$ cm. = 125 cm.

$d \geq 1{,}2 \times 125 = 1{,}50$ cm. $\quad$ Se toma h = 1,60 m. (Ver Fig.8.13)

Conocida la altura útil "d", se conoce la magnitud de los momentos totales actuantes en la cara superior de los pilotes.

$M'_{ux} = M_{ux} + V_{ux}\ d = 45 + 10 \times 1{,}5 = 60$ T–m

$M'_{uy} = M_{uy} + V_{uy}\ d = 9 + 3 \times 1{,}5 = 13{,}5$ T–m

DETERMINACION DE LA CARGA AXIAL PURA EQUIVALENTE

Entrando a la Tabla 8.III, se tiene la siguiente expresión:

$$P_{ue} = 6\left(\frac{P_u}{6} + \frac{M\acute{u}_x}{2S} + \frac{M\acute{u}_y}{2\sqrt{3}\ S}\right)$$

Donde,

$$P_u = 560.000 + pp_{cabezal} = 560.000 + \frac{2.00 \times 1,73}{2} \times 1,60 \times 6 \times 2.400 = 599.859 \text{ Kg.}$$

$P_u = 600$ T.

Nótese que el peso propio del cabezal en este caso es el 7,1% de la carga

$M\acute{u}_x = 60$ T–m

$M\acute{u}_y = 13,5$ T–m

La carga axial pura equivalente P_{ue}

$$P_{ue} = 6\left(\frac{600}{6} + \frac{60}{2 \times 1,25} + \frac{13,5}{2\sqrt{3} \times 1,25}\right) = 762,7\text{T.} \approx 770 \text{ T.}$$

El cabezal se diseñará como ejemplos anteriores con una carga actuante equivalente de 770 T. para los efectos de punzonamiento, tracción, longitud de desarrollo, aplastamiento y por fricción.

El cabezal definitivo a diseñar se muestra en la Fig. 8.42.

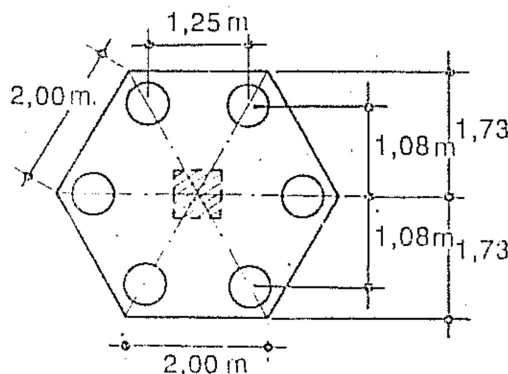


Figura 8.42

CAPITULO IX

Vigas de Riostras

9.1 INTRODUCCION

Independizar una fundación o cabezal de una viga de riostra es bastante dificil, ya que la viga de riostra por lo general acompaña a estos elementos y en forma conjunta

La mayoría de las veces se diseña el cabezal o fundación bajo algunos conceptos que directamente consideran la existencia de vigas de riostras y en todo caso si no las consideran en sus cálculos, se hace obligatorio la colocación de estos elementos.

9.2 CONCEPTO

Las vigas de riostras son unos elementos rígidos las cuales tienen como función unir en dirección orto-horizontal todas las fundaciones de una estructura, a fin de que:

a .- Se impidan cualquier tipo de desplazamiento diferencial horizontal a nivel del terreno en la estructura.

b .- Mantenerla la fundación en posición para que la imagen estructural asumida en el nodo (empotramiento) se considere como cierta.

9.3 METODOS DE CALCULO

Las vigas de riostras se calculan de diferentes maneras de acuerdo a las distintas condiciones de cargas a que se encuentran sometidas, por ejemplo; en las vigas de riostras exteriores de un edificio sobre los cuales descansa una pared de cerramiento es posible considerar esta carga generan-

do flexión, por supuesto, con los debidos factores de minoración teniéndose en cuenta que toda la pared no carga sobre la viga, (téngase en cuenta el efecto de arco y el confinamiento que pueda generar las columnas laterales). Aplicar expresiones de flexión sobre vigas de riostras no es la verdad, aunque en este caso se esté por encima de las necesidades reales. Igualmente, cualquier carga local colocada sobre una viga de riostra debe ser considerada que genera flexión sobre ella.

Se ha generalizado el cálculo de las vigas de riostras trabajando a tensión considerando que éstas serán las transmisoras de fuerzas basales, por considerarse que el trabajo a tensión, como el caso mas desfavorable en condiciones normales (sin cargas locales aplicadas), diseñándose con una carga axial a tensión de diez a quince por ciento (10% a 15%) de la máxima carga axial de diseño de las columnas que la viga arriostre *(El autor recomienda utilizar 15%).*

En una viga de riostra el agrietamiento del concreto no debe ocurrir, para así proteger el refuerzo y evitar que sea atacado por agentes agresivos que rodean a la viga, ya que generalmente las vigas de riostras son subterráneas, véase la Fig. 9.1.

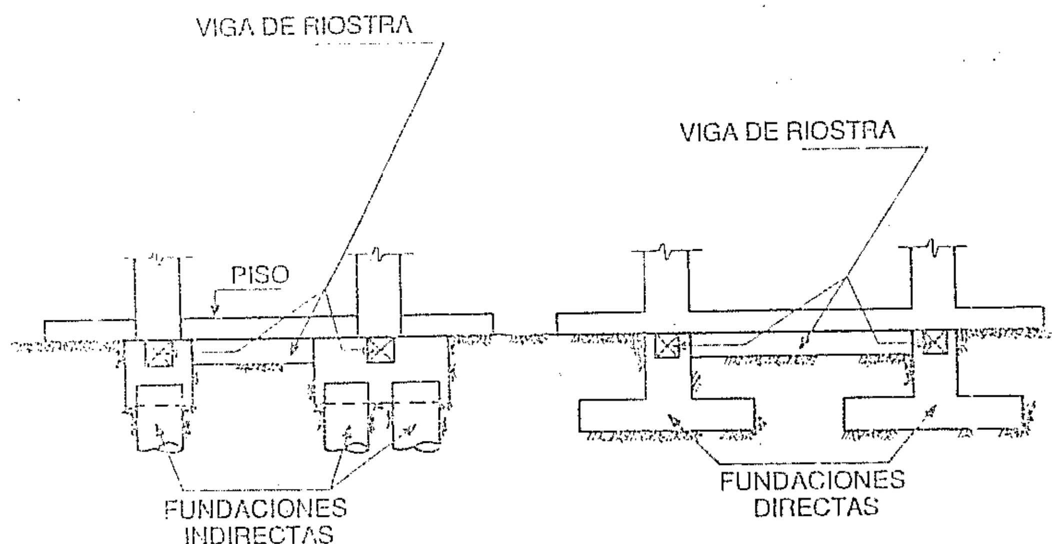


Figura 9.1

Algunos proyectistas consideran la posibilidad de paso de momentos provenientes de las columnas a las vigas de riostras a través del pedestal o cabezal, en este caso, este efecto de flexión se le debe adicionar y considerarse para su diseño.

9.3.1 METODO DE LA SECCION TRANSFORMADA

Este método considera el concepto de la sección transformada donde el área de concreto equivalente es "n" veces el área de acero, y "n" es la relación entre los módulos de elasticidad del acero respecto al concreto, según el siguiente criterio:

Sea, $A_{ct} = nA_s$

$A'_{ct} = nA'_s$

Donde, A_{ct} = Area de concreto transformada inferior.

A'_{ct} = Area de concreto transformada superior.

Sea la sección de la viga de riostra, mostrada en la Fig. 9.2.a, y la equivalente en la Fig. 9.2.b, donde A_s es área de acero total inferior y A'_s área de acero total superior.

En las Fig. 9.3.a y 9.3.b se puede ver la sección equivalente llevada a la sección transformada, donde las áreas A_s y A_s' desarrollan las fuerzas T y T' respectivamente y a su vez la sección de concreto desarrolla la fuerza Tc, las cuales sumadas deberan ser igual a las cargas de diseño F= 0,15 Pu.

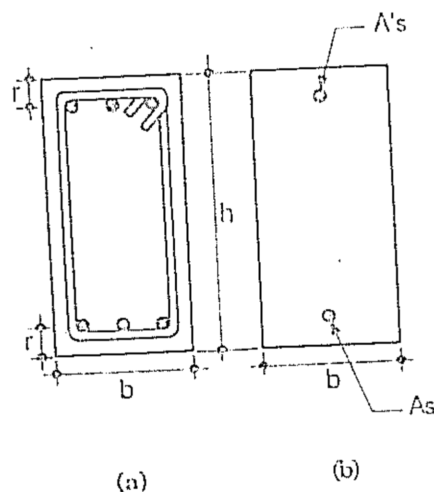


Figura 9.2

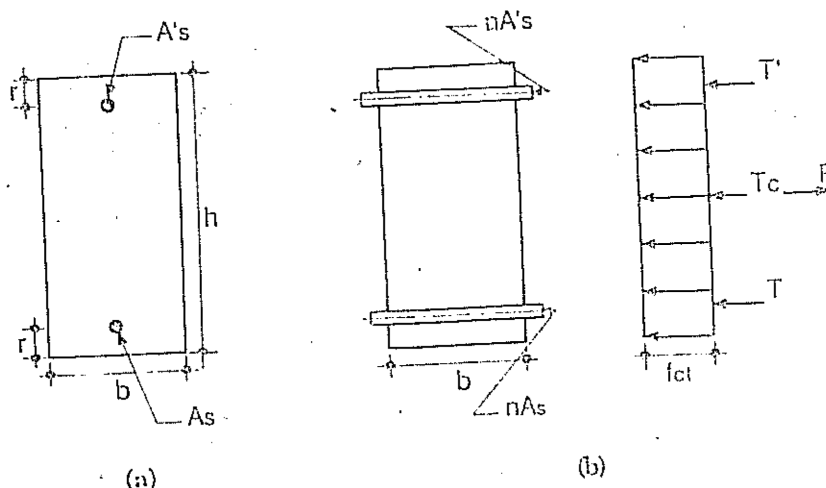


Figura 9.3

Se tiene que, f_{ct} = Esfuerzo de tracción del concreto.
$T = A_{ct}\, f_{ct} = n\, A_s\, f_{ct}$
$T' = A_{ct}\, f_{ct} = n\, A'_s\, f_{ct}$
$T_c = f_{ct}\, A_c = f_{ct}\, bh$

Como $A_s = A'_s \Rightarrow T = T'$ y haciendo $\Sigma F_H = 0$

$F \leq T_c + T + T' \Rightarrow F \leq f_{ct}\, A_c + 2n\, A_s\, f_{ct}$ Dividiendo la expresión por f_{ct}

$\frac{F}{f_{ct}} \leq A_c + 2nA_s$ Sustituyendo, A_{st} = Area de acero total = $2A_s$ y $F = 0{,}15\, P_u$

Se tiene que área de concreto de la viga $A_c = bh \geq \frac{0{,}15\, P_u}{f_{ct}} - n\, A_{st}$

$$bh \geq \frac{0{,}15\, P_u}{f_{ct}} - n\, A_{st}$$

Tomando, $n = 10$
$f_{ct} = 0{,}1\, f'_c$
$f'_c \leq 280$ K/cm²
$f_y = 4.200$ K/cm² y sustituyendo convenientemente se tiene:

$$A_c = bh \geq \frac{1{,}5\, P_u}{f'_c} - 10\, A_{st}$$

9.4 AREA DE ACERO EN VIGAS DE RIOSTRAS

También se tiene que $F \leq \text{Ø}\, A_{st}\, f_y$ y además $F = 0{,}15\, P_u$
Igualando las dos expresiones de F, se tiene la cantidad de área de acero total requerida A_{st} en la viga de riostra.

$$A_{st} = \frac{0{,}15\, P_u}{\text{Ø}\, f_y}$$ Donde, $\text{Ø} = 0{,}70$

9.5 AREA DE CONCRETO EN VIGAS DE RIOSTRAS

Sustituyendo el valor obtenido de A_{st} en la expresión $A_c = bh$, se tiene el área de concreto requerida A_c en una viga de riostra.

$$bh \geq 1{,}5\, P_u\left(\frac{1}{f'_c} - \frac{1}{\text{Ø} f_y}\right)$$

9.6 TABLA 9 – I. RELACION CARGA-SECCION PARA VIGAS DE RIOSTRAS

Pu (Ton.)	Acero fy = 4.200 K/cm²				Acero fy = 2.800 K/cm²			
	Concreto K/cm²			Area de acero (cm²)	Concreto K/cm²			Area de acero (cm²)
	210	250	280		210	250	280	
	Area de concreto (cm²)							
50	350	280	250	5	320	270	280	5
100	670	550	490	6	640	530	460	8
150	1.000	830	730	8	960	790	690	12
200	1.330	1.100	970	11	1.280	1.050	920	16
250	1.660	1.380	1.220	13	1.500	1.310	1.150	20
300	1.990	1.650	1.460	16	1.920	1.580	1.380	23
350	2.330	1.930	1.700	18	2.240	1.840	1.610	27
400	2.660	2.200	1.940	21	2.560	2.100	1.840	31
450	2.990	2.480	2.190	23	2.870	2.360	2.070	35
500	3.320	2.750	2.430	26	3.190	2.620	2.300	39
600	3.980	3.300	2.910	31	3.830	3.150	2.750	46
700	4.650	3.850	3.400	36	4.470	3.670	3.220	54
800	5.310	4.400	3.880	41	5.110	4.190	3.680	62
900	5.970	4.950	4.670	46	5.740	4.720	4.140	69
1.000	6.640	5.490	4.850	52	6.380	5.240	4.600	77
1.100	7.300	6.040	5.340	57	7.020	5.760	5.000	85
1.200	7.960	6.590	5.820	62	7.660	6.290	5.520	92
1.300	8.630	7.140	6.310	67	8.300	6.810	5.980	100
1.400	9.290	7.690	6.790	72	8.930	7.330	6.430	108

9.7 CRITERIOS DE DISEÑO PARA VIGAS DE RIOSTRAS

1.- Tómese como sección mínima de concreto 25 x 25
(No normalizado, opinión del Autor)

2.- El recubrimiento mínimo es de 7,0 cm. *(A.7.7.1)*

3.- El área de acero mínimo es 1% del área total del núcleo confinado por los estribos. *(No normalizado, opinión del Autor)*

4.- El diámetro menor del refuerzo longitudinal será Ø 1/2".

5.- El menor número de cabillas en una sección será dos cabillas arriba y dos cabillas abajo.

6.- La separación máxima en los estribos no excederá a d/2. *(A.11.5.4.1)*

7.- El diámetro mínimo para los estribos será de Ø 3/8".

8.- Si la viga es de altura h > 75 cm. se colocará una armadura longitudinal de perímetro de un área igual a por lo menos 10% del área de la armadura a tracción total, con una separación no mayor que el ancho de la viga ni superior a 30 cm. *(No normalizado, opinión del Autor)*.

9.8 EJEMPLOS DE CALCULO DE VIGAS DE RIOSTRA

9.8.1 EJERCICIO Nº 1

Diseñar la viga de riostra que une dos cabezales de columnas con las cargas y materiales dados.

DATOS

Carga de columna Nº 1	Cargas de columna Nº 2
$Pu_1 = 292$ T.	$Pu_2 = 160$ T.
Concreto $f'c = 210$ K/cm^2	Acero $fy = 4.200$ K/cm^2

CARGA DE DISEÑO

Se toma la carga máxima Pu=292 T.≈300 T. (Se redondea a la más cercana a la TABLA 9.I)

Entrando a la TABLA 9.I se tiene $Ac = bh \geq 1.990$ cm^2 y $As = 16$ cm^2

Como no hay información del ancho del cabezal (lo cual siempre condicionará al ancho de la viga de riostra), se toma en este caso sección cuadrada de 45 x 45 cms.

Se requieren 6 Ø 3/4", tres arriba y tres abajo.

Area de acero colocada $A_{st} = 6 \times 2{,}84\ cm^2 = 14{,}04\ cm^2$

CHEQUEO DEL PORCENTAJE DE ACERO DEL NUCLEO

$$P_{núcleo} = \frac{17{,}04}{38 \times 38} = 0{,}011 > 0{,}01 \qquad O.K$$

Se acepta el diseño.

Usar 6 Ø 3/4", tres arriba y tres abajo. ver la Fig. 9.4.

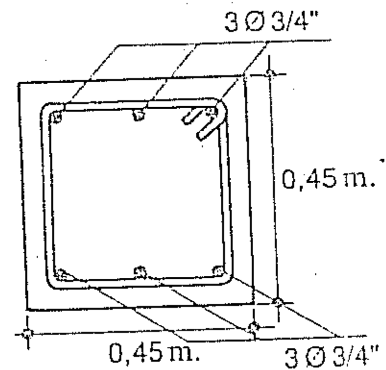


Figura 9.4

9.6.2 EJERCICIO Nº 2

Diseñar la viga de riostra para las cargas dadas, con el criterio que debe absorber la mitad del momento que recibe el cabezal. *(Este criterio es opinión del Autor).*

DATOS

L = Longitud centro a centro de columnas
P_u = 430 T.
Concreto f'_c = 250 K/cm²
M_u = 40 T-m
Acero f_y = 4.200 K/cm²
Cabezal cuadrado de 2,00 x 2,00 y de altura h = 1,20 m.

En este caso la mitad del momento se ha considerado que lo absorbe el cabezal y la mitad restante la tomarán las dos vigas de riostras en el plano que llega al cabezal.

CARGAS DE DISEÑO

$$P_u = 430\ T. \qquad y \qquad M_u = \frac{40\ T\text{-}m}{4} = 10\ T\text{-}m$$

El área de acero requerido por las cargas aplicadas, A_{st}

$$A_{st} = \frac{0{,}15\ P_u}{Ø\ f_y} = \frac{0{,}15 \times 430.000}{0{,}7 \times 4.200} = 21{,}9\ cm^2$$

El área de concreto requerido $A_c = bh$

$$bh \geq 1{,}5\ P_u \left(\frac{1}{f'_c} - \frac{1}{Ø\ f_y}\right) = 1{,}5 \times 430.000 \left(\frac{1}{250} - \frac{1}{0{,}7 \times 4.200}\right)$$

$A_c = bh = 2.361\ cm^2$ => Se toma sección de 40 x 80 cms.

CHEQUEO DEL PORCENTAJE DE ACERO DEL NUCLEO

$$P_{núcleo} = \frac{21,19}{26 \times 66} = 0,0127 > 0,01 \qquad OK$$

DISEÑO POR FLEXION

$$\text{Altura útil requerida, } d = \sqrt{\frac{10.000}{43,5 \times 0,40}} = 23,9 \text{ cm.} < 73 \text{ cm.} \qquad OK$$

AREA DE ACERO REQUERIDA POR FLEXION

$$A_s = \frac{10.000}{0,9 \times 4.200 \times 0,9 \times 0,73} = 4,03 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_s = 1,33 \times 4,03 = 5,36 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_{mín}} = \frac{14}{4.200} \times 40 \times 73 = 9,73 \text{ cm}^2 > 5,36 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{Usar } 5,36 \text{ cm}^2$$

AREA DE ACERO TOTAL PARA EL DISEÑO

Por tensión, acero distribuido en toda la sección: 21,9 cm^2 => 6 Ø 7/8"

Por flexión, acero en las caras superior e inferior: 5,36 cm^2 => 2 Ø 3/4"

El acero a flexión se coloca tanto arriba como abajo, ya que el momento en la base del cabezal puede cambiar de sentido por efecto del sismo.

$$\text{Se asume un corte} \Rightarrow V_u = \frac{M_u}{L} = \frac{10.000 \text{ Kg-m}}{6,00 \text{ m.}} = 1.666 \text{ Kg.}$$

$$v_u = \frac{V_u}{bd} = \frac{1.666}{40 \times 73} = 0,57 \text{ K/cm}^2 < 0,85 \times 0,53 \sqrt{250} = 7,12 \text{ K/cm}^2 \qquad OK$$

Utilizar estribos Ø 3/8" c/30 cm.

ACERO DE PARAMENTO (Requerido por ser sección mayor de 75 cm.)

$$A_{s_{par}} = 0,1 A_{st} = 0,1 (2 \times 2,84 + 6 \times 3,87) = 2,89 \text{ cm}^2 < 6 \times 3,87 = 23,27 \text{ cm}^2 \qquad OK$$

Como el acero por tracción se coloca distribuído, entonces no requiere acero de parámetro, ver diseño definitivo en la Fig. 9.5.

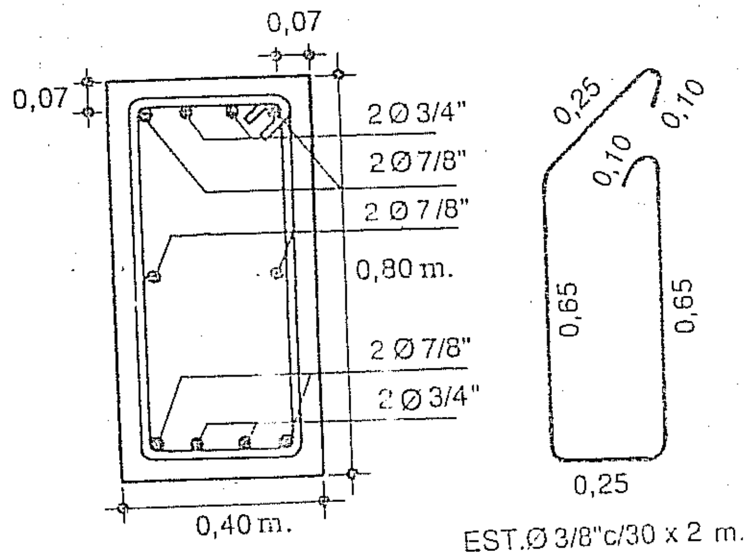

0,07
0,07
2 Ø 3/4"
2 Ø 7/8"
2 Ø 7/8"
0,80 m.
2 Ø 7/8"
2 Ø 3/4"
0,40 m.
0,25
0,10
0,10
0,65
0,65
0,25
EST.Ø 3/8"c/30 x 2 m.

Figura 9.5

INDICE ALFABETICO